De facto, é fácil ver que se a distância $D$ variar de $\Delta D$, a variação $\Delta u$ que resulta para o deslocamento $u$, é

$$(11) \qquad \Delta u = \frac{\Delta D}{\rho''} (\alpha_1 - \alpha_2) ,$$

onde $\alpha_1 - \alpha_2$ é a variação angular apresentada pela marca móvel. $\Delta D$ deve então ser tal que o erro $\Delta u$ seja desprezível em face do erro $\varepsilon_u$ provocado pelos erros acidentais da medição dos ângulos.

Na hipótese de $\alpha_1 - \alpha_2 = 100''$, para que o erro da medição da distância produza um erro no deslocamento de 0,1 mm, valor pequeno em face de $\varepsilon_u$ (Quadro III, § 23), a precisão com que se deve conhecer $D$ é de cerca de 0,6 m.

Como se sabe, a medição de distâncias no terreno com uma precisão desta ordem de grandeza não oferece dificuldades especiais.

**19. Método angular da marca móvel.** — Da fórmula (1) deduz-se fàcilmente que o erro quadrático médio do deslocamento $u$ é

$$(12) \qquad \varepsilon_u = \pm \frac{D}{\rho''} \varepsilon_\alpha \sqrt{2} ,$$

na hipótese dos ângulos $\alpha_1$ e $\alpha_2$ serem obtidos rigorosamente nas mesmas condições.

Supondo que em cada pontaria se fazem $l$ leituras, o erro de cada pontaria, depois de feita a média destas leituras, é

$$(a) \qquad \pm \sqrt{\varepsilon_p^2 + \frac{\varepsilon_l^2}{l}} .$$

Supondo ainda que na observação de cada direcção se fazem $p$ pontarias, o erro de cada direcção média é então

$$(b) \qquad \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_p^2}{p} + \frac{\varepsilon_l^2}{pl}} .$$

Como para medir um ângulo é necessário fazer pelo menos uma centralização, este erro duma direcção virá afectado do erro de centralização,

$$(c) \qquad \pm \sqrt{\varepsilon_c^2 + \frac{\varepsilon_p^2}{p} + \frac{\varepsilon_l^2}{pl}} .$$

Supondo agora que para definir a direcção da marca móvel $M_1$ se tomam $n$ marcas fixas $A_1, A_2, \ldots A_n$ (fig. 15), então, cada valor do ângulo $\alpha$ é obtido pela diferença entre uma direcção, $OM_1$, e uma média de $n$ direcções $OA_m$. O erro dum ângulo é portanto

$$(d) \qquad \pm \sqrt{\varepsilon_c^2 + \frac{\varepsilon_p^2}{p} + \frac{\varepsilon_p^2}{np} + \frac{\varepsilon_l^2}{pl} + \frac{\varepsilon_l^2}{npl}} =$$

$$= \pm \sqrt{\varepsilon_c^2 + \frac{n+1}{pn} \left( \varepsilon_p^2 + \frac{\varepsilon_l^2}{l} \right)} .$$

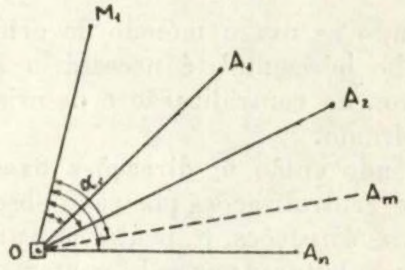



Fig. 15

Na hipótese de se fazerem $c$ centralizações e em cada centralização se visarem todas as marcas $M_1, A_1, \ldots A_n$ nas condições já referidas, então, o erro final do ângulo $\alpha_1$ é

$$(e) \qquad \varepsilon_{\bar{\alpha}_1} = \pm \sqrt{\frac{1}{c} \left[ \varepsilon_c^2 + \frac{n+1}{pn} \left( \varepsilon_p^2 + \frac{\varepsilon_l^2}{l} \right) \right]} ,$$

que é também o erro de $\alpha_2 = A_m \hat{O} M_2$, isto é, o erro do ângulo da direcção móvel com a direcção fixa $OA_m$ medido após o deslocamento, na hipótese de ele ser medido exactamente do mesmo modo.

Então as expressões (12) e (e) permitem escrever

$$(13) \qquad \varepsilon_u = \pm \frac{D}{\rho''} \sqrt{\frac{2}{c} \left[ \varepsilon_c^2 + \frac{n+1}{pn} \left( \varepsilon_p^2 + \frac{\varepsilon_l^2}{l} \right) \right]} ,$$

expressão que dá o erro quadrático médio com que se conhece o deslocamento $u$.

**20. Método da variação da direcção.** — O erro quadrático médio dum deslocamento $u$ medido por este método é

$$(14) \qquad \varepsilon_u = \pm \frac{D}{\rho''} \varepsilon_l \sqrt{2}$$

como se deduz da expressão (2).

Suponhamos que o aparelho é conservado imóvel sobre o pilar de observação. No caso de se fazerem $p$ pontarias para a marca e $l$ leituras por cada pontaria, tanto antes do deslocamento, como após o deslocamento, é fácil ver, por um raciocínio igual ao anterior, que

$$(15) \qquad \varepsilon_u = \pm \frac{D}{\rho''} \sqrt{\frac{2}{p}\left(\varepsilon_p^2 + \frac{\varepsilon_l^2}{l}\right)}.$$

Quando se usa o método da orientação do limbo horizontal, é necessário atender aos erros de centralização e de orientação deste círculo.

Havendo então $n_o$ direcções fixas e fazendo $c_o$ centralizações por cada observação destas $n_o$ direcções, $p_o$ pontarias para cada marca e $l_o$ leituras por cada pontaria, o erro de orientação do limbo será

$$(a) \qquad \varepsilon_o = \pm \sqrt{\frac{1}{c_o}\left[\varepsilon_c^2 + \frac{1}{n_o p_o}\left(\varepsilon_p^2 + \frac{\varepsilon_l^2}{l_o}\right)\right]}.$$

Se, ao visar a marca móvel, se fizerem $c$ centralizações, $p$ pontarias por cada centralização e $l$ leituras por cada pontaria as fórmulas (14) e (a) permitem escrever

$$(16) \qquad \varepsilon_u = \pm \frac{D}{\rho''} \sqrt{\frac{2}{c}\left[\varepsilon_c^2 + \frac{1}{p}\left(\varepsilon_p^2 + \frac{\varepsilon_l^2}{l}\right)\right] + \varepsilon_o^2}.$$

**21. Método do ponto de estação móvel.** — Da expressão (3) deduz-se que o erro quadrático médio do deslocamento $u$ vale

$$(17) \qquad \varepsilon_u = \pm \frac{D_1 D_2}{D} \frac{\varepsilon_\alpha}{\rho''} \sqrt{2}.$$

Supondo que cada um dos valores do ângulo $\alpha$, antes do deslocamento, e após o deslocamento, é obtido com $c$ centralizações, que cada direcção é obtida com $p$ pontarias e que em cada pontaria se fazem $l$ leituras, então

$$(18) \quad \varepsilon_u = \pm \frac{D_1 D_2}{D} \frac{1}{\rho''} \sqrt{\frac{2}{c}\left[\varepsilon_c^2 + \frac{2}{p}\left(\varepsilon_p^2 + \frac{\varepsilon_l^2}{l}\right)\right]}.$$

Neste método é necessário discutir a posição das marcas fixas em relação ao ponto de estação móvel, isto é, os valores que a fracção $\frac{D_1 D_2}{D}$ pode tomar, pois $\varepsilon_u$ é-lhe directamente proporcional.

O valor desta fracção torna-se pequeno quando $D_1$ e $D_2$ são pequenos e $D$ é grande. Isto acontece quando os três pontos estão sensìvelmente em linha recta (fig. 16 *a*).

Então é,

$$(a) \qquad D = D_1 + D_2.$$

No caso de $M_1$ estar a meio da distância $A\,B$, então o coeficiente $\frac{D_1 D_2}{D}$ reduz-se a $\frac{D}{2}$.

Isto significa que em igualdade de erros nas diferenças angulares, o erro no deslocamento medido pelo método do ponto de estação móvel é metade do que se obteria pelos outros métodos.

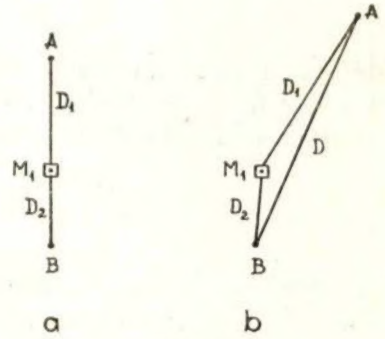


Fig. 16

Quando $D_1$ é muito grande em face de $D_2$, (fig. 16 *b*), então

$$(b) \qquad \frac{D_1 D_2}{D} \approx D_2$$

e o erro $\varepsilon_u$ é proporcional à pequena distância $D_2$. O ponto a uma grande distância, $A$, não tem pràticamente influência sobre $\varepsilon_u$.

**22. Influência dos erros de leitura, pontaria e centralização.** — As expressões (13), (16) e (18) mostram a grande influência que tem o erro de centralização, $\varepsilon_c$, sobre o erro do deslocamento, $\varepsilon_u$, em face da influência dos erros, $\varepsilon_p$ e $\varepsilon_l$.

A diminuição da influência de $\varepsilon_c$ pelo aumento do número de centragens $c$ não só não resulta num processo cómodo, em virtude do enorme aumento de trabalho que isso acarreta, mas também, com o aumento de $c$, os outros erros diminuem, de tal modo que a influência relativa se mantém.

A melhor via a seguir para a solução desta dificuldade será a da diminuição de $\varepsilon_c$ pelo aperfeiçoamento dos métodos de centralização.

A análise das expressões (13), (15), (16) e (18) permite obter o melhor método a empregar para fazer observações com um determinado aparelho, método esse que deve conduzir a uma influência sensìvelmente igual de todos os erros.

É conveniente notar, contudo, que não há pràticamente vantagem em diminuir os coeficientes dos quadrados dos erros a fracções inferiores a 1/6 ou 1/8, pois para valores

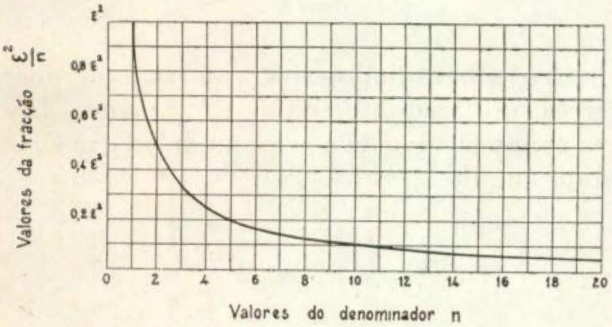



Fig. 17

inferiores a estes, a fracção $\frac{\varepsilon^2}{n}$ pouco diminui.

De facto, na fig. 17 está representada a variação dos valores desta fracção, em função do seu denominador $n$.

Como se vê, a parcela $\frac{\varepsilon^2}{n}$ diminui ràpidamente com os primeiros valores de $n$, e após $n = 6$ ou 8, a diminuição é já muito lenta, de tal modo que o aumento de trabalho que significa o aumento de $n$ não compensa já a diminuição obtida na parcela do quadrado do erro total.

**23. Exemplos de precisões atingidas. Comparação com resultados experimentais.** — Para dar uma ideia da precisão com que se podem conhecer os deslocamentos, apresentam-se a seguir os valores do erro quadrático médio dum deslocamento determinado pelos diferentes métodos descritos, no caso de se usarem os aparelhos cujas características estão indicadas no Quadro II.

Supondo que cada série de ângulos concorrentes no ponto de estação é observada com duas centralizações, que cada direcção é observada com duas pontarias e que em cada pontaria se fazem duas leituras será

$$c = 2$$
$$p = 2$$
$$l = 2 .$$

Os erros quadráticos médios com que são obtidos os deslocamentos estão então indicados no Quadro III, supondo que no caso do método angular da marca móvel há duas direcções fixas,

$$n = 2 ,$$

que há quatro direcções fixas no caso do método da variação de direcção com o limbo orientado,

$$n_o = 4 ,$$

e ainda que, neste último método, o processo de trabalho adoptado para a orientação é igual ao seguido na observação das marcas móveis, isto é, que

$$c_o = 2$$
$$p_o = 2$$
$$l_o = 2 .$$

Os valores dos erros em milímetros foram obtidos na hipótese da distância $D$ ser, em todos os casos, igual a 20 m, e, no caso do ponto de estação móvel, ser

$$\frac{D_1 \, D_2}{D} = 20 \text{ m} .$$

Os valores dos erros obtidos por estas

## QUADRO III

| Método | | Teodolito Wild T2 | | Teodolito Kern DKM2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\varepsilon_u$ segundos centesimais | $\varepsilon_u$ milímetros | $\varepsilon_u$ segundos centesimais | $\varepsilon_u$ milímetros |
| angular da marca móvel . . . . | | $\pm 5{,}5$ | $\pm 0{,}17$ | $\pm 6{,}8$ | $\pm 0{,}21$ |
| da variação da direcção | sem centralização. . | $\pm 3{,}4$ | $\pm 0{,}11$ | $\pm 4{,}3$ | $\pm 0{,}14$ |
| | com orientação do limbo. . . . . | $\pm 7{,}2$ | $\pm 0{,}23$ | $\pm 8{,}7$ | $\pm 0{,}28$ |
| do ponto de estação móvel . . . | | $\pm 5{,}8$ | $\pm 0{,}18$ | $\pm 7{,}2$ | $\pm 0{,}23$ |

fórmulas estão de acordo com os resultados experimentais.

De facto, na execução dum trabalho de medição de deslocamentos duma construção [1] pelo método angular da marca móvel, dispunham-se de dois pilares fixos, a cada um dos quais correspondiam duas marcas fixas. Durante as observações estacionou-se 18 vezes num dos pilares e 13 vezes no outro, em cerca de dois meses. Como de cada vez se observaram as duas marcas fixas, foi possível calcular os erros quadráticos médios de cada medição dum ângulo. Os erros obtidos foram de $\pm 6'',1$ e de $\pm 6'',5$ para os pilares onde se estacionou respectivamente 18 e 13 vezes.

Nestas observações foi usado o teodolito Wild T2. O método de trabalho adoptado era tal que

$$l = 4$$
$$p = 2$$
$$c = 1 .$$

Ora, substituindo estes valores e os dos erros do teodolito Wild T2 (Quadro II) na expressão que dá o erro quadrático medio dum ângulo

$$\varepsilon_\alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{c}\left[\varepsilon_c^2 + \frac{2}{p}\left(\varepsilon_p^2 + \frac{\varepsilon_l^2}{l}\right)\right]}$$

obtem-se $\varepsilon_\alpha = \pm 5'',5$.

O erro do ângulo obtido directamente é pois da ordem de grandeza do mesmo erro calculado através da teoria da propagação dos erros acidentais. Isto é uma prova da concordância entre os resultados experimentais e os resultados obtidos pela teoria da propagação de Gauss.

*(Continua)*

---

[1] «Estudo da influência das variações diárias de temperatura sobre o canal da Ribeira de Alcântara», Centro de Estudos de Engenharia Civil, Lisboa, 1945. Trabalho apresentado à Câmara Municipal de Lisboa

# MÓTOR RAIL, LTD.

BEDFORD — INGLATERRA

**Locomotivas Diesel e a gasolina**

**Carros para transporte de terras (Dumpers) a Diesel**

# BRITISH STEEL PILING CO., LIMITED

**LONDRES**

ESTACAS PRANCHAS «**LARSSEN**» PARA COFRAGENS

BATE-ESTACAS, (Torres, Macacos, etc.)

GUINCHOS ZENIT

INSTALAÇÕES PARA A APLICAÇÃO DE ESTACAS EM BETON, PREFABRICADAS

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS PARA PORTUGAL

## F. NÓBREGA DE LIMA, L.DA

| LONDRES | Sede | PORTO |
|---|---|---|
| 115, Park Street London, W. I | Avenida 24 de Julho, 1, 2.º D. | Rua Sá da Bandeira, 562, 3.º |

## Cimento «Liz» hidrofugado «N»

PRÓPRIO PARA

**IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS**

REBOCOS, FUNDAÇÕES, PAREDES, ETC.

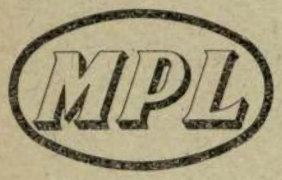
Substitue com vantagem de ordem técnica e económica todos os impermeabilizadores conhecidos.

Em sacos de papel de 50 quilos

Peçam instruções para o seu emprêgo

**Sede: Rua do Cais de Santarém, 64, 1.º — LISBOA**
**Filial: Rua de Santo António, 190-A, 1.º — PORTO**

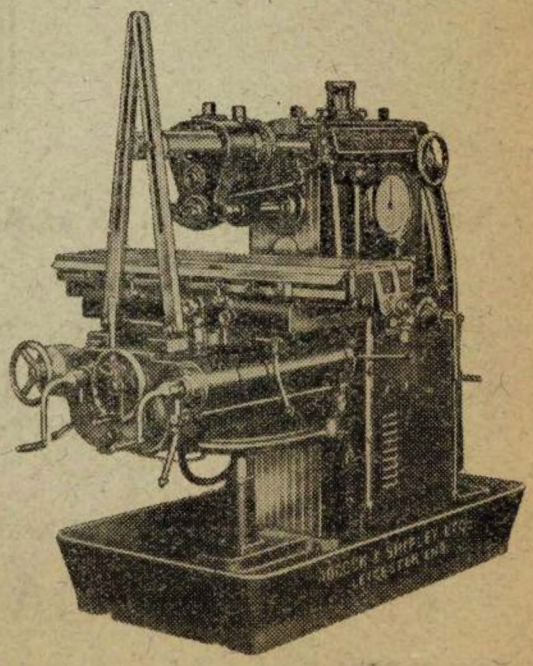
**Agentes em todo o País**




- Tornos mecânicos de precisão com caixa de engrenagens
- Máquinas de fresar universais
- Limadores mecânicos
- Máquinas de furar
- Barbequins eléctricos, etc.

Todas estas máquinas são construidas segundo os mais modernos princípios técnicos de grande rendimento e precisão e provêm de fábricas de primeira grandeza.

**Entrega imediata ou a breve prazo**



## MÁQUINAS DE PRECISÃO, LIMITADA

(Director: Eng.º J. D'ARRIAGA DE TAVARES)

Armazém de exposição: **Rua da Boa Vista, 45-49 — LISBOA // Telef. 6 1581**

# O GALVANÓMETRO BALÍSTICO

## UM ERRO DE CLASSIFICAÇÃO

PELO ENG.º ELECTROTÉCNICO (I. S. T.) BENJAMIM DA CONCEIÇÃO MENDONÇA

C D. 621.317

É frequente ver-se em tratados, relativamente recentes sobre aparelhos de medida no capítulo da Galvanometria, a designação de *Galvanómetro balístico.* Esta designação, pela sua generalização, está tomando foros de clássica e, assim, como muitas designações erróneas, parece tornar-se universalmente aceita sem reparos de maior como se se tratasse de uma designação exacta e perfeita.

Quem estuda, portanto, assuntos de aparelhagem de medida eléctrica e não entra no âmago das questões, considera como a coisa mais natural a designação de *Galvanómetro balístico,* ficando com uma noção perfeitamente errada acerca do que sejam galvanómetros, pois, fica a supôr que os galvanómetros se dividem em *balísticos e não balísticos.*

Um pouco de raciocínio e de reflexão poderá mostrar logo o absurdo da classificação, porquanto, estudando a fundo a teoria dos galvanómetros e a sua construção, se verifica que não há *galvanómetros balísticos,* porque nenhum deles se projecta como balas, mas, que existem apenas *propriedades balísticas* das respectivas equipagens que são comuns a todos eles, qualquer que seja o seu grau de sensibilidade.

Quem primeiro sistematizou o capítulo especial da Electricidade relativo às medidas eléctricas foi o professor belga *Eric Gerard,* Director, que foi, do *Instituto Electrotécnico de Montefiore,* anexo à Universidade de Liège, onde leccionou brilhantemente a respectiva *Cadeira de Medidas Eléctricas,* e, cujo nome se espalhou pelo mundo inteiro pela sua competência comprovada neste capítulo.

Na segunda edição do seu livro *Mesures Electriques,* publicado em Paris, a páginas 143, lá vem a designação *Estudo balístico do galvanómetro de iman fixo e campo radial,* designação esta que se reproduziu em todas as edições posteriores, pelo menos, até à última que aquele reviu e se publicou em 1908.

É claro, que todos os que se habituaram a falar no *Galvanómetro balístico,* para designar os galvanómetros de grande sensibilidade, e, portanto, destinados a ensaios em que a quantidade de electricidade em circulação no respectivo circuito é relativamente pequena, julgaram que só os galvanómetros desta natureza é que têm propriedades balísticas. Mas, essa suposição é inteiramente errada, porquanto, como adiante veremos, todos os galvanómetros, qualquer que seja o seu grau de sensibilidade, têm propriedades balísticas; tudo está na quantidade de electricidade que se lhe faça passar pelo seu quadro móvel e as condições mecânicas da sua construção.

Senão, vejamos.

A equipagem móvel de um galvanómetro qualquer é um sistema oscilante e cujo funcionamento se regula, portanto, pela conhecida equação diferencial de segunda ordem de coeficientes constantes da forma

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\,a\,\frac{d\alpha}{dt} + b^2\alpha = 0 \qquad (1)$$

Para se ter uma noção exacta do funcionamento desta equação torna-se absolutamente indispensável conhecer com perfeição o significado físico de cada um dos seus termos, pois, só assim se poderá ver os fundamentos da nossa afirmação, isto é, de que a classificação de *Galvanómetro balístico* é errada ou imprópria.

O estudo das propriedades balísticas do galvanómetro aplica-se às suas equipagens e está relacionado com a sua forma de construção.

Neste estudo há, portanto, a distinguir dois casos que são: primeiro o caso em que o quadro da equipagem se move num campo uniforme onde não existe núcleo e no segundo aquele em que o quadro respectivo se move num campo radial onde existe, portanto, núcleo que é o caso corrente e o que interessa mais.

Como sabemos, no primeiro caso o quadro move-se num campo em que as linhas de força entre os polos do iman são rectas pelo que importa no seu deslocamento ter que se considerar o coseno do ângulo de deslocação em relação à direcção das linhas de força. No segundo caso as linhas de força são radiais e, em qualquer posição do quadro, estas entram normalmente à sua superfície. Na determinação do *momento de impulsão* da equipagem móvel não há que ter em conta o coseno do ângulo de deslocamento, visto ser sempre igual à unidade.

Portanto, quer se trate de um galvanómetro com quadro suspenso por fios metálicos ou com espirais metálicas e *pivôts* de suporte ou apoio, quando o quadro galvanométrico é percorrido por uma corrente eléctrica, dá origem a um momento de impulsão que provoca vários momentos de reacção e que são:

*Primeiro:* Momento instantâneo de reacção devido à inércia do quadro.

*Segundo :* Momento instantâneo de reacção do meio ambiente em que o quadro se desloca.

*Terceiro:* Momento instantâneo de reacção originado pela deformação da suspensão ou das espirais de torsão.

Vejamos qual o valor *do Momento de impulsão devido à corrente* i. Consideremos o quadro galvanométrico da fig. 1 e 2 com a largura $l$ e altura $h$. Suponhamos que este quadro é constituido por $N$ espiras, e que gira no entreferro de um iman permanente com peças polares N e S e respectivo núcleo.

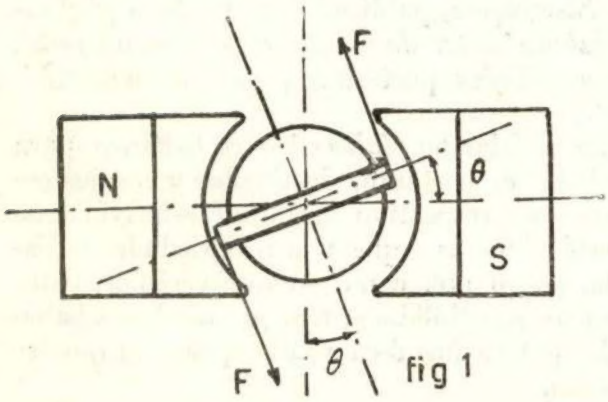


fig 1

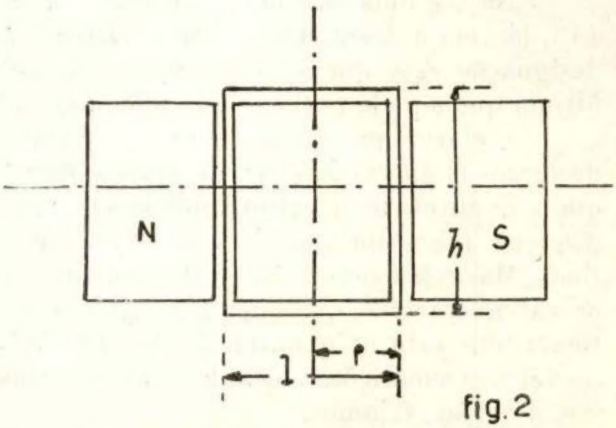


fig. 2

O valor da intensidade média do campo magnético, no qual se deslocam os lados verticais do quadro, será represetando por H.

Sendo $i$ a ietensidade de corrente que percorre o quadro num dado momento, temos que a força que actua num ponto de um dos condutores verticais do quadro será igual ao produto do campo H pela corrente $i$.

Representado por *f* essa força, será

$$f = Hi \tag{2}$$

Considerando todas estas forças ao longo do lado *h* do quadro e nas *N* espiras do mesmo, teremos que o somatório destas forças será igual a

$$F = \Sigma f = HNLi \tag{3}$$

Como no outro lado do quadro se gera uma força F igual e de sentido contrário, teremos o binário que provoca o deslocamento do quadro no campo respectivo.

O momento deste binário será, portanto, igual a

$$M_x F = Fl = HNLi \times l \tag{4}$$

Como o produto $h \times l$ representa a área média do quadro galvanométrico (fig. 2), representá-lo-emos por *S* que introduziremos em (4) e o *momento de impulsão devido à corrente i* será representado pela expressão

$$M_x F = HNSi \tag{5}$$

A este momento opõem-se os três momentos de reacção que vamos determinar.

1.° — *Momento instantâneo de reacção devido à inércia do quadro*

Considerámos f (2) a força que actua num ponto de um dos lados do quadro. Seja $\rho$ a distância desse ponto ao eixo de rotação do quadro (fig. 2). O momento desta força f em relação a este eixo será igual a

$$C = f\rho \tag{6}$$

Como o quadro se desloca em torno de um eixo, o seu movimento é de rotação. Se for *e* o espaço percorrido pelo ponto do quadro no tempo t será

$$e = vt \tag{7}$$

Multiplicando ambos os membros desta equação por f teremos que

$$fe = fvt \tag{8}$$

Suporemos que a velocidade do quadro é uniforme, e que $\omega$ é a sua velocidade angular pelo que será

$$v = \rho\omega \tag{9}$$

Introduzindo (9) na equação (8) vem

$$fe = f\rho\omega t \tag{10}$$

Ora o produto fe representa o trabalho desenvolvido pela força f aplicada ao ponto do quadro considerado.

Se considerarmos o trabalho desenvolvido ao longo de um dos lados do quadro teremos que

$$\Sigma fe = \Sigma f\rho\omega t \tag{11}$$

Apliquemos o conhecido teorema das potências vivas que nos diz que: «*o acréscimo da potência viva aplicada a um corpo é igual ao somatório do trabalho da força total que lhe é aplicada*».

Então, considerando $m$ a massa do ponto do quadro, teremos

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} = \Sigma f e \tag{12}$$

que, introduzindo em (11), dá

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} = \Sigma f \rho \omega t. \tag{13}$$

Mas, $f\rho$ é o binário C da equação (6).

Logo, virá

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} = \Sigma C \omega t. \tag{14}$$

Se elevarmos ao quadrado ambos os membros da equação (9) e introduzirmos o valor de $v^2$ na equação (14) teremos que

$$\Sigma \frac{m \rho^2}{2} \omega^2 = \Sigma C \omega^2 t. \tag{15}$$

Mas, $\Sigma \frac{m \rho^2}{2}$ é o momento de inércia de metade do quadro, que representaremos por I. Portanto, o momento de inércia total do quadro será igual a

$$\Sigma m \rho^2 = 2 I \tag{16}$$

A expressão (15) virá, portanto,

$$\Sigma \frac{m \rho^2}{2} \omega^2 = 2 I \times \frac{\omega^2}{2} = \Sigma C \omega t$$

donde tiramos que

$$I \omega = \Sigma C t \tag{17}$$

Se, considerarmos, porém, a variação do acréscimo da potência viva durante o tempo dt, teremos que

$$d (I \omega) \Sigma C dt \tag{18}$$

Mas,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$

considerando $\theta$ o ângulo de desvio do respectivo quadro galvanométrico. Logo, introduzindo este valor em (18) virá

$$d \left( I \frac{d\theta}{dt} \right) = \Sigma C dt$$

Dividindo ambos os membros por dt, teremos

$$\frac{d \left( I \frac{d\theta}{dt} \right)}{dt} = \Sigma C$$

ou, finalmente,

$$\Sigma C = I \frac{d^2 \theta}{dt^2} \tag{19}$$

Temos assim o *momento instantâneo de reacção devido à inércia do quadro galvanométrico.*

Vejamos agora o valor do

2.º — *Momento instantâneo de reacção devido ao deslocamento do quadro no ar e no entreferro do campo.*

Este momento compreende os momentos dos binários amortecedores devidos ao atrito do quadro contra o ar e as correntes induzidas que se geram nas espiras respectivas do quadro pela sua deslocação no campo indutor H.

Se considerarmos $f_a$ o coeficiente de fricção do quadro contra o ar, o momento do binário de fricção será igual a

$$f_a \frac{d\theta}{dt} .$$

A f. e. m de indução, gerada pelo quadro durante seu deslocamento com a velocidade angular $\frac{d\theta}{dt}$ no campo H, será igual a

$$e = HSN \frac{d\theta}{dt} .$$

Se, R for a resistência óhmica das N espiras do quadro mais a resistência exterior em derivação sobre o quadro, teremos que o valor da corrente induzida, que circula neste circuito, será igual a

$$i = \frac{HSN \frac{d\theta}{dt}}{R} .$$

Multiplicando ambos os membros desta equação por $HSN$ vem

$$HSNi = \frac{H^2 S^2 N^2 \frac{d\theta}{dt}}{R} .$$

Este será, portanto, o valor do momento do binário devido às correntes induzidas, geradas pela deslocação do quadro no campo indutor do íman permanente.

Somando os dois momentos dos binários teremos que

$$f_a \frac{d\theta}{dt} + \frac{H^2 S^2 N^2}{R} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \left(f_a + \frac{H^2 S^2 N^2}{R}\right) \frac{d\theta}{dt} . \tag{20}$$

É esta soma que constitui o *Momento instantâneo de reacção* devido ao deslocamento do quadro no ar e no entreferro respectivo.

Falta calcular o

3.º — *Momento instantâneo de reacção devido à suspensão ou às espirais de torsão*

Considerando $\theta$ o ângnlo de desvio do quadro sob a acção da corrente i, e se designarmos por B um coeficiente que depende da natureza da suspensão ou das espirais que provocam o binário retardador do movimento do quadro, teremos que o produto $B\theta$ representará *o momento instantâneo de reacção da acção antagonista provocada pela torsão da suspensão ou das espirais.*

A soma de todos estes momentos de reacção antagonista equilibrarão o *Momento de impulsão da corrente i* e, assim, teremos que

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left(f_a = \frac{H^2 S^2 N^2}{R}\right) \frac{d\theta}{dt} + B\theta = HSNi \quad . \tag{21}$$

Neste instante teremos o equilíbrio da equipagem móvel e a equação (21) subsistirá enquanto o quadro permanecer sob a acção da mesma corrente. Mas, quando cessar a acção da respectiva corrente, esta anula-se, e, portanto, teremos

$$i = 0 ,$$

pelo que o seu momento se torna nulo, isto é,

$$HSNi = 0 .$$

Logo, a equação (21) torna-se

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \left(f_a + \frac{H^2 S^2 N^2}{R}\right) \frac{d\theta}{dt} + B\theta = 0 \tag{22}$$

Para simplificar dividiremos ambos os membros por I e faremos

$$\frac{f_a}{I} + \frac{H^2 S^2 N^2}{I R} = 2m \qquad e \qquad \frac{B}{I} = n^2 , \tag{22 a}$$

cujos valores introduziremos em (21) e então esta equação apresenta-se sob a forma

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2m \frac{d\theta}{dt} + n^2 \theta = 0 \tag{23}$$

Como vemos, esta equação tem exactamente a forma da equação (1). Logo, a sua aplicação é geral e esta não se faz apenas a uma qualidade especial de galvanómetros e o seu desenvolvimento só vai reforçar a nossa afirmação.

Vamos, portanto, ver o que acontece à equipagem móvel do aparelho quando nela cessa de circular a respectiva corrente.

Estamos em presença de uma equação diferencial de segunda ordem de coeficientes constantes bem conhecida e sem dificuldades maiores de resolução. Não damos, certamente, novidade nenhuma ao leitor. Mas, vamos resolvê-la para ver se as suas soluções nos podem dizer alguma coisa de interessante que justifiquem a nossa observação quanto à designação imprópria de *Galvanómetro balístico.*

Estabeleçamos as seguintes relações

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = s\,\frac{d\theta}{dt} = s^2\theta \tag{24}$$

em que $s$ é uma constante arbitrária.

A diferenciação das relações (24) dá-nos o seguinte resultado:

$$d\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = sd\theta = s^2\theta\,dt$$

donde

$$d\theta = s\theta dt$$

ou

$$\frac{d\theta}{\theta} = sdt$$

cuja integração dá

$$\text{Log}\,\theta + \text{Log}\,C_1 = st + C_2 \quad , \tag{25}$$

sendo $C_1$ e $C_2$ as constantes de integração, cujos valores adiante se conhecerão. A equação (25) pode-se apresentar da seguinte forma

$$\text{Log}\,\theta = st\text{Log}e + \text{Log}C$$

donde

$$\theta = C\,.\,e^{st} \quad , \tag{26}$$

A eliminação da constante arbitrária s é-nos dada pela introdução em (23) das relações (24) e então temos

$$s^2\theta + 2\,m\,s\,\theta + n^2\theta = 0$$

ou, dividindo ambos os membros por $\theta$,

$$s^2 + 2\,ms + n^2 = 0 \tag{27}$$

a nossa muito bem conhecida *equação característica*.

Dela tiramos as duas soluções $s_1$ e $s_2$ que são

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{-2\,m + \sqrt{4\,m^2 - 4\,n^2}}{2} = -\,m + \sqrt{m^2 - n^2} \\ s_2 &= \frac{-2\,m - \sqrt{4\,m^2 - 4\,n^2}}{2} = -\,m - \sqrt{m^2 - n^2} \end{aligned} \tag{28}$$

que, introduzidas em (26), dão as duas soluções particulares

$$\theta_1 = C_1\,e^{(-\,m + \sqrt{m^2 - n^2})\,t}$$

e

$$\theta_2 = C_2\,e^{(-\,m - \sqrt{m^2 - n^2})\,t}$$

que, somadas, dão a solução geral da equação (23), representada pela expressão

$$\theta = C_1\,e^{(-\,m + \sqrt{m^2 - n^2})\,t} + C_2\,e^{(-\,m - \sqrt{m^2 - n^2})\,t} = e^{-\,m\,t}\left[C_1\,e^{t\sqrt{m^2 - n^2}} + C_2\,e^{-\,t\sqrt{m^2 - n^2}}\right] \tag{29}$$

Temos, assim, o valor do desvio da equipagem movel do galvanometro expresso em função de exponenciais e de duas constantes de integração $C_1$ e $C_2$ que são a chave do estudo dos movimentos dos quadros galvanométricos, conforme as condições iniciais que se estabelecerem para o seu funcionamento. É a partir delas que os construtores de aparelhos de medida de precisão e industriais estabelecem as características segundo o fim que têm em vista.

Vamos, portanto, ver o que elas nos dizem àcerca do funcionamento dos aparelhos de quadro móvel e iman fixo.

A fórmula (29) apresenta-nos logo de entrada três casos a considerar e que dependem do valor do radical que afecta a função exponencial.

Assim, temos que pode acontecer que seja

$$m > n \quad ; \quad m = n \quad ; \quad m < n$$

*Primeiro caso:* $m > n$ ou seja $m^2 - n^2 > 0$

Façamos, portanto,

$$m^2 - n^2 = p^2$$

e teremos que

$$p = \sqrt{m^2 - n^2}$$

que introduziremos na solução geral (29) que se apresentará da forma seguinte

$$\theta = C_1 \, e^{(-m+p)t} + C_2 \, e^{-(m+p)t} \tag{30}$$

Representando $\theta$ o ângulo de desvio do quadro, será este o espaço que o mesmo percorreu no tempo t. A sua velocidade será, portanto, igual a

$$\frac{d\theta}{dt} = -(m-p)\, C_1 \, e^{(-m+p)t} - (m+p)\, C_2 \, e^{-(m+p)t} \tag{31}$$

O máximo da expressão (30) será dado quando

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \, .$$

Logo, será,

$$\frac{d\theta}{dt} = -(m-p)\, C_1 \, e^{(-m+p)t} - (m+p)\, C_2 \, e^{-(m+p)t} = 0$$

donde

$$-(m-p)\, C_1 \, e^{(-m+p)t} = (m+p)\, C_2 \, e^{-(m+p)t} \tag{32}$$

Em lugar destas expressões, podemos considerar os seus logaritmos, e, então, temos

$$\text{Log} - (m-p)\, C_1 \, e^{-(m-p)t} = \text{Log}\, (m+p)\, C_2 \, e^{-(m+p)t} \tag{33}$$

Ora

$$\text{Log} - (m-p)\, C_1 \, e^{-(m-p)t} = \text{Log}\,(p-m) + \text{Log}\, C_1 - (m-p)\,t = \text{Log}\, C_1 \,(p-m) - (m-p)\,t$$

Republic Steel Corporation
New York

Revere Copper And Brass Incorporated
New York

Martin, Black & Co. (Wire Ropes), Ltd.
Coatbridge -- Escócia

E. W. Bliss & Co., Ltd.
New York — Londres — Paris

Signode Steel Strapping Co.
Chicago

Daniel Adamson & Co, Ltd.
Dunkinfield — Inglaterra

Fairbanks, Morse & Co. Inc.
New York

Bruce Peebles & Co., Ltd.
Edinburg — Escócia

Consolidated Pneumatic Tool Co., Ltd.
Londres

Chicago Pneumatic Tool Company
New York

Frederick Parker, Ltd.
Leicester — Inglaterra

Blaw-Knox, Ltd.
Londres

Phoenix Engineering Co, Ltd.
Chard — Inglaterra

Motor Rail, Ltd.
Bedford — Inglaterra

British Ropeway Engineering Co., Ltd.
Londres

Drag Scraper Engineering Co., Ltd.
Londres

British Steel Piling Co., Limited
Londres

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS PARA PORTUGAL

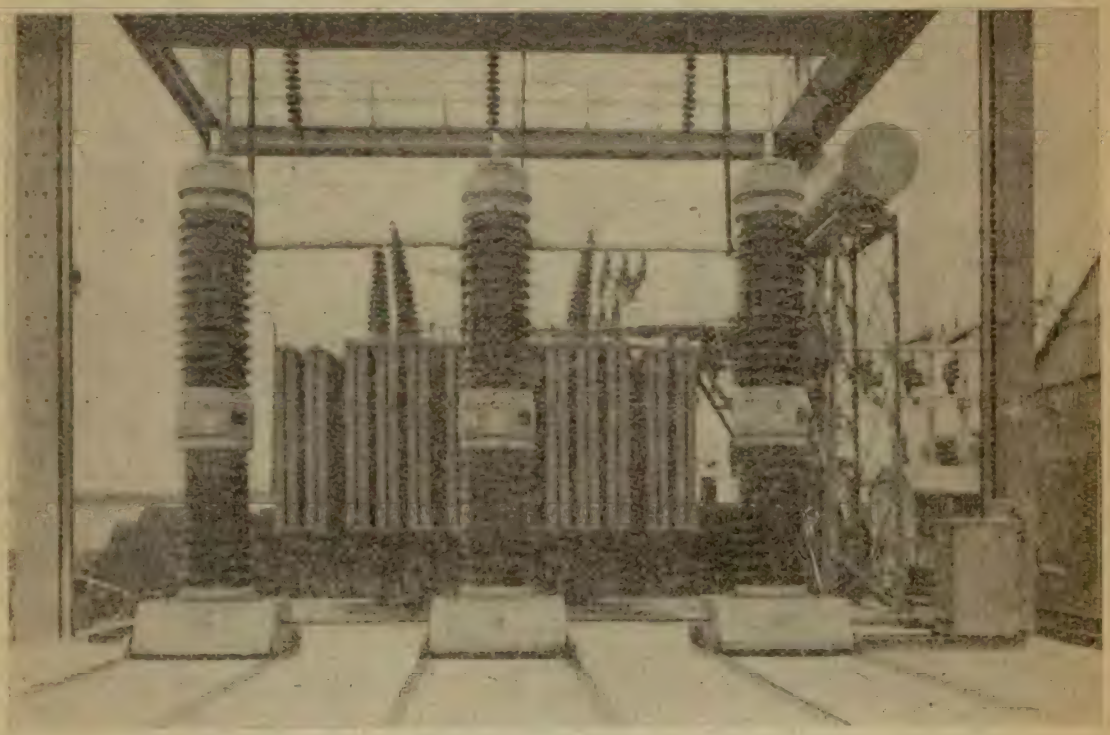
F. NÓBREGA DE LIMA, L.DA

**LONDRES**
115, Park Street London W. I

**Sede**
Avenida 24 de Julho, 1, 2.º D.

**PORTO**
Rua Sá da Bandeira, 562, 3.º

# Ateliers de Constructions Electriques de Charleroi



Aparelhagem eléctrica em geral — Geradoras de todos os géneros e de todas as potências — Turbo-alternadores — Motores para todas as indústrias e aplicações — Transformadores para todas as potências — Comutatrizes simples e em cascala — Rectificadores de vapor de mercúrio.

Material de tracção eléctrica — Comandos eléctricos de laminadores — Máquinas de extracção eléctricas — Pontes rolantes e gruas — Todos os aparelhos de elevação e manutenção — Motores especiais para a indústria têxtil — Bombas centrífugas em geral — Bombas de esgotamento.

Sinalização electrica para caminhos de ferro — Sinalização para minas e metalurgia
Iluminação eléctrica de carruagens de caminhos de ferro.

Cabos telefónicos — Cabos armados para alta e baixa tensão — Fios e cabos revestidos de borracha — Caixas e acessórios para cabos — Tubos isolantes e acessórios — Todas as aplicações electro-magnéticas.

REPRESENTANTES

## NOGUEIRA LIMITADA

**LISBOA**
RUA DOS DOURADORES, 107
TELEFONE 2 1381-2

**PORTO**
RUA DO ALMADA, 136
TELEFONE 7 167

e

$$\text{Log}\,(m + p)\,C_2\,e^{-(m+p)t} = \text{Log}\,(m + p) + \text{Log}\,C_2 - (m + p)\,t = \text{Log}\,C_2\,(p + m) - (m + p)\,t\,.$$

Introduzindo estes valores em (33) vem

$$\text{Log}\,C_1\,(p - m) - (m - p)\,t = \text{Log}\,C_2\,(p + m) - (m + p)\,t$$

donde

$$-(m - p)\,t + (m + p)\,t = \text{Log}\,C_2\,(p + m) - \text{Log}\,C_1\,(m - p)$$

ou seja

$$2\,pt = \text{Log}\,\frac{C_2\,(p + m)}{C_1\,(p - m)}$$

e daqui se tira que

$$t = \frac{1}{2p}\,\text{Log}\,\frac{C_2\,(p + m)}{C_1\,(p - m)} \tag{34}$$

Temos aqui a primeira consequência a tirar.

Este é o valor do tempo correspondente ao valor máximo do desvio $\theta$ naquele instante. A condição, para que t tenha um valor real, é que a relação das constantes $C_1$ e $C_2$ seja menor que zero, isto é

$$\frac{C_2}{C_1} < 0\,.$$

Neste caso, teremos que

$$p - m < 0$$

e, portanto,

$$\sqrt{m^2 - n^2} < n\,.$$

A ausência de qualquer função sinusoidal mostra que o movimento do quadro é aperiódico. Depois de cessada a acção, que provoca o deslocamento do quadro, este volta imediatamente à posição inicial, sem mais oscilação. Os fabricantes ingleses aplicam muito esta condição aos seus aparelhos de medida de precisão, como voltímetros e amperímetros de Laboratório, e até em aparelhos de uso industrial.

Para determinar os valores das constantes de integração neste caso podem-se estabelecer duas condições iniciais que são:

Primeiro: $\quad t = 0 \qquad \theta = 0 \qquad \text{e} \qquad \dfrac{d\,\theta}{dt} = \omega_0$

isto é, o quadro parte do zero com uma velocidade inicial $\omega_0$.

Então, teremos que a expressão (30) tomará a forma

$$\theta = C_1\,e^{-(m-p)t} + C_2\,e^{-(m+p)t} = 0 \tag{35}$$

A sua derivada será igual a

$$\frac{d\,\theta}{dt} = -(m - p)\,C_1\,e^{-(m-p)t} - (m + p)\,C_2\,e^{-(m+p)t} = \omega_0\,. \tag{36}$$

As equações (35) e (36) formam um sistema de equações simultâneas que nos vão permitir determinar os valores de $C_1$ e $C_2$ em função de valores definidos pelas condições iniciais estabelecidas.

Da equação (35) tiramos que

$$C_1 e^{-(m-p)t} = -C_2 e^{-(m+p)t}$$

donde

$$C_1 = -C_2 \frac{e^{-(m+p)t}}{e^{-(m-p)t}} = -C_2 e^{-2pt}$$

Da mesma forma o valor de $C_2$ será

$$C_2 = -C_1 \frac{1}{e^{-2pt}} = -C_1 e^{-2pt} .$$

Introduzindo, sucessivamente, estes valores na equação (36) obtemos:
Para $C_2$:

$$-(m-p) \times -C_2 e^{-2pt} e^{-(m-p)t} - (m+p) C_2 e^{-(m+p)t} =$$

$$= (m-p) C_2 e^{-(m+p)t} - (m+p) C_2 e^{-(m+p)t} = -2p C_2 e^{-(m+p)t} = \omega_0$$

donde se tira que

$$C_2 = -\frac{\omega_0}{2p} e^{(m+p)t} \tag{37}$$

Para $C_1$:

$$-(m-p) C_1 e^{-(m-p)t} - (m+p) \times -C_1 e^{2pt} e^{-(m+p)t} =$$

$$= -(m-p) C_1 e^{-(m-p)t} + (m+p) C_1 e^{-(m-p)t} = 2p C_1 e^{-(m-p)t} = \omega_0$$

donde deduzimos que

$$C_1 = \frac{\omega_0}{2p} e^{(m-p)t} \tag{38}$$

Mas, nas condições iniciais ficou estabelecido que

$$t = 0$$

Portanto, introduzindo em (37) e (38) este valor virá

$$(m-p)t = (m+p)t = 0$$

e a exponencial, tornando-se igual à unidade, dá finalmente para $C_1$ e $C_2$ os seguintes valores

$$C_1 = \frac{\omega_0}{2p} \quad e \quad C_2 = -\frac{\omega_0}{2p} ,$$

os quais, introduzidos na equação (29), dão a seguinte expressão

$$\theta = e^{-mt} \left( \frac{\omega_0}{2p} e^{pt} - \frac{\omega_0}{2p} e^{-pt} \right) = \frac{\omega_0}{2p} e^{-mt} (e^{pt} - e^{-pt}) \tag{39}$$

O valor máximo de $\theta$, correspondente ao tempo t, é-nos dado fazendo

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 .$$

Logo, derivando (39) vem

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega_0}{2p} \times -(m - p)\, e^{-(m-p)t} - \frac{\omega_0}{2p} \times -(m + p)\, e^{-(m+p)t} =$$

$$= -\frac{\omega_0}{2p}(m - p)\, e^{-(m-p)t} + \frac{\omega_0}{2p}(m + p)\, e^{-(m+p)t} = 0$$

donde,

$$-\frac{\omega_0}{2p}(m - p)\, e^{-(m-p)t} = -\frac{\omega_0}{2p}(m + p)\, e^{-(m+p)t}$$

ou, simplificando,

$$(m - p)\, e^{-(m-p)t} = (m + p)\, e^{-(m+p)t}\,.$$

Para desembaraçarmo-nos das exponenciais, vamos tomar os logaritmos destas expressões. Teremos então

$$\mathrm{Log}\,(m - p)\, e^{-(m-p)t} = \mathrm{Log}\,(m + p)\, e^{-(m+p)t}\,.$$

Ora,

$$\mathrm{Log}\,(m - p)\, e^{-(m-p)t} = \mathrm{Log}\,(m - p) - (m - p)\,t$$

e

$$\mathrm{Log}\,(m + p)\, e^{-(m+p)t} = \mathrm{Log}\,(m + p) - (m + p)\,t\,.$$

Portanto,

$$\mathrm{Log}\,(m - p) - (m - p)\,t = \mathrm{Log}\,(m + p) - (m + p)\,t$$

donde tiramos que

$$\mathrm{Log}\,(m + p) - \mathrm{Log}\,(m - p) = (m + p)\,t - (m - p)\,t$$

ou

$$\mathrm{Log}\,\frac{m + p}{m - p} = 2pt\,.$$

Daqui deduzimos o valor de t correspondente ao máximo desvio $\theta$.

Será, pois,

$$t = \frac{1}{2p}\,\mathrm{Log}\,\frac{m + p}{m - p} = \mathrm{Log}\left(\frac{m + p}{m + p}\right)^{\frac{1}{2p}} \tag{40}$$

Introduzindo este valor na equação (39), e designando agora o valor do desvio $\theta$, correspondente ao tempo t, por $\theta_t$, vem

$$\theta_t = \frac{\omega_0}{2p}\, e^{-m\,\mathrm{Log}\left(\frac{m+p}{m-p}\right)^{\frac{1}{2p}}} \left[ e^{p\,\mathrm{Log}\left(\frac{m+p}{m-p}\right)^{\frac{1}{2p}}} - e^{-p\,\mathrm{Log}\left(\frac{m+p}{m-p}\right)^{\frac{1}{2p}}} \right] \tag{41}$$

expressão esta a que vamos dar outra forma, aproveitando as propriedades de transformação dos logaritmos, que o leitor muito bem sabe ser feita mediante a expressão

$$e^{x \log a} = a^x$$

a qual nos permite, portanto, eliminar todas as funções exponenciais.

Teremos então, sucessivamente, que

$$e^{-m \operatorname{Log}\left(\frac{m+p}{m-p}\right)^{\frac{1}{2p}}} = \left[\left(\frac{m+p}{m-p}\right)^{\frac{1}{2p}}\right]^{-m} = \sqrt{\left(\frac{m+p}{m-p}\right)^{-\frac{m}{p}}} \tag{42}$$

$$e^{p \operatorname{Log}\left(\frac{m+p}{m-p}\right)^{\frac{1}{2p}}} = \left[\left(\frac{m+p}{m+p}\right)^{\frac{1}{2p}}\right]^{p} = \sqrt{\frac{m+p}{m-p}} \tag{43}$$

$$e^{-p \operatorname{Log}\left(\frac{m+p}{m-p}\right)^{\frac{1}{2p}}} = \left[\left(\frac{m+p}{m-p}\right)^{\frac{1}{2p}}\right]^{-p} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m+p}{m-p}}} \tag{44}$$

Os valores expressos em (42), (43) e (44) vão ser introduzidos na equação (41) e virá, pois, para valor de $\theta_t$ a seguinte expressão

$$\theta_t = \frac{\omega_0}{2p}\sqrt{\left(\frac{m+p}{m-p}\right)^{-\frac{m}{p}}}\left(\sqrt{\frac{m+p}{m-p}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{m+p}{m-p}}}\right) =$$

$$= \frac{\omega_0}{2p}\left(\frac{m+p}{m-p}\right)^{-\frac{m}{2p}}\left(\frac{\sqrt{m+p}}{\sqrt{m-p}} - \frac{\sqrt{m-p}}{\sqrt{m+p}}\right) =$$

$$= \frac{\omega_0}{2p}\left(\frac{m+p}{m-p}\right)^{-\frac{m}{2p}}\frac{(m+p)-(m-p)}{\sqrt{m^2-p^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{m^2-p^2}}\left(\frac{m+p}{m-p}\right)^{-\frac{m}{2p}} \tag{45}$$

A expressão do desvio $\theta_t$ vem-nos, pois, expurgada de todas as funções exponenciais e vai-nos permitir tirar uma conclusão muito importante: é que *o desvio do quadro galvanométrico é proporcional à velocidade inicial* $\omega_0$ *e, no momento em que ele se efectua, é independente da mesma velocidade.*

Agora vamos ver o que acontece com a segunda condição inicial.

Neste caso temos:

$$t = 0 \quad , \quad \theta = \alpha_0 \quad \text{e} \quad \frac{d\theta}{dt} = 0 \, ,$$

Isto é, o quadro parte duma posição $\alpha_0$ sem velocidade inicial.

Nestas circunstâncias, temos

$$\theta = e^{-mt}\left(C_1 e \quad + C_2 e^{-pt}\right) = \alpha_0 \tag{46}$$

e

$$\frac{d\theta}{dt} = -(m-p)\, C_1\, e^{-(m-p)t} - (m+p)\, C_2\, e^{-(m+p)t} = 0 \tag{47}$$

Da expressão (47) podemos deduzir $C_1$ em função de $C_2$ e então temos

$$-(m-p)\, C_1\, e^{-(m-p)t} = (m+p)\, C_2\, e^{-(m+p)t}$$

donde

$$C_1 = -\frac{m+p}{m-p} \, . \, C_2\, e^{-2pt} \tag{48}$$

Introduzindo o valor de $C_1$ (48) na expressão (46) vem

$$-\frac{m+p}{m-p} C_2 e^{-2pt} e^{-(m-p)t} + C_2 e^{-(m+p)t} = \alpha_0 \tag{49}$$

Esta equação permite-nos obter a constante $C_2$ em função de quantidades conhecidas e, assim, temos que

$$\alpha_0 = C_2 \left[ -\frac{m+p}{m-p} e^{-(m+p)t} + e^{-(m+p)t} \right] =$$

$$= C_2 e^{-(m+p)t} \left[ -\frac{m+p}{m-p} + 1 \right] = -\frac{2p}{m-p} C_2 e^{-(m+p)t}$$

donde se tira que

$$C_2 = -\frac{\alpha_0 (m-p)}{2p} \cdot e^{(m+p)t} \tag{50}$$

Por forma idêntica se obtém o valor de $C_1$. Para isso basta empregar o mesmo método que aplicámos quando exprimimos $C_1$ em função de $C_2$. Vamos, portanto, exprimir agora $C^2$ em função de $C_1$. Recorramos à equação (48) e dela deduziremos que

$$C_2 = -\frac{m-p}{m+p} C_1 e^{2pt}, \tag{51}$$

como é evidente.

Introduzamos agora o valor de $C_2$ da fórmula (51) na equação (46) e teremos:

$$C_1 e^{-(m-p)t} - \frac{m-p}{m+p} C_1 e^{2pt} e^{-(m+p)t} = \alpha_0$$

ou

$$\alpha_0 = C_1 \left[ e^{-(m-p)t} - \frac{m-p}{m+p} e^{-(m-p)t} \right] =$$

$$= C_1 e^{-(m-p)t} \left[ 1 - \frac{m-p}{m+p} \right] =$$

$$= C_1 \frac{2p}{m+p} e^{-(m-p)t}$$

donde se tira que

$$C_1 = \frac{\alpha_0 (m+p)}{2p} e^{(m-p)t} \tag{52}$$

Para termos os valores de $C_1$ e $C_2$ em função de valores determinados, falta aplicar a condição de $t = 0$.

Aplicando esta condição às fórmulas 50 e 52 vem para

$$t = 0 \qquad (m-p)t = (m+p)t = 0 \qquad e^0 = 1$$

Logo, teremos finalmente, que

$$C_1 = \frac{\alpha (m+p)}{2p} \quad e \quad C_2 = \frac{\alpha_0 (m-p)}{2p} \tag{53}$$

Introduzindo estes valores na equação (30) vem para valor de $\theta$ a seguinte equação

$$\theta = e^{-mt}\left[\frac{m+p}{2p}\alpha_0 e^{pt} - \frac{m-p}{2p}\alpha_0 e^{-pt}\right] =$$

$$= \frac{\alpha_0}{2p} e^{-mt}\left[(m+p)e^{pt} + (p-m)e^{-pt}\right] \tag{54}$$

Se, examinarmos as expressões de $\theta$, representadas pelas fórmulas (45) e (54), e traçarmos as curvas de movimento da equipagem correspondentes a cada um dos casos, vemos que nos casos da fórmula (45) o referido movimento se traduzirá por uma curva, representada na fig. 3, e que o segundo caso terá a representação indicada na fig. 4.

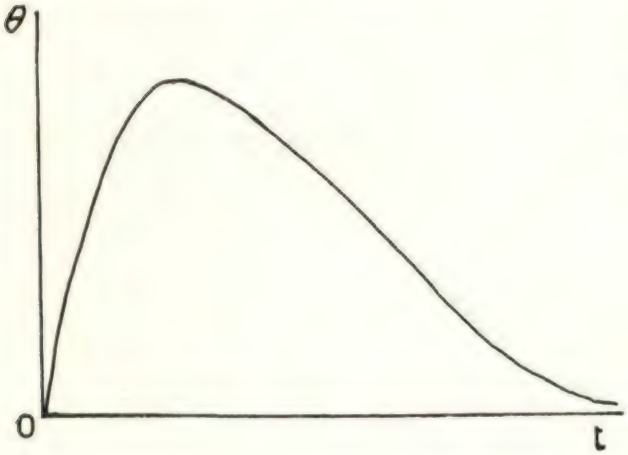



fig.3

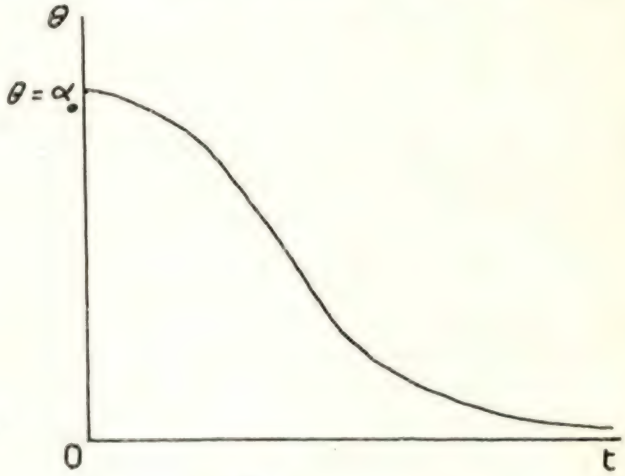



fig.4

Qualquer destes casos se aplicam aos galvanómetros de quadro móvel, quer o binário de torsão seja dado por suspensões, quer por espirais, como é o caso vulgar dos voltímetros ou amperímetros de quadro móvel utilisados em corrente contínua. O segundo caso é frequentemente observado nesta última espécie de aparelhos em que a equipagem móvel se desviou e se fixou no valor a medir correspondente ao desvio $\alpha_0$.

Logo que cessou a observação, desligou-se o aparelho e o ponteiro voltou ao zero da escala sem oscilações, portanto, com amortecimento completo. A construção de galvanómetros, voltímetros e amperímetros, com esta propriedade é apanágio das boas casas construtoras de aparelhos para Laboratórios.

Vejamos agora o *segundo caso,* isto é,

$$m = n\,; \qquad \sqrt{m^2 - n^2} = 0$$

A solução da equação do movimento (23), representada pela equação (30), toma a seguinte forma:

$$\theta = (C_1 t + C_2)\, e^{-mt} = \frac{C_1 t + C_2}{e^{mt}} \tag{52}$$

visto que uma das soluções neste caso é $te^{-mt}$ e a outra $e^{-mt}$.

A derivada da expressão (52) será, portanto,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C_1 e^{mt} - m\,(t\,C_1 + C_2)\, e^{mt}}{e^{(mt)^2}} \tag{53}$$

Neste caso, o desvio da equipagem efectua-se até t atingir o seu máximo valor. Como o máximo de função se obtém fazendo

$$\frac{d\theta}{dt} = 0$$

será

$$\frac{C_1 e^{mt} - m(t C_1 + C_2) e^{mt}}{e^{(mt)^2}} = 0$$

Como, porém,

$$e^{mt} \neq 0$$

será

$$C_1 e^{mt} - m(t C_1 + C_2) e^{mt} = 0$$

ou seja

$$C_1 - m t C_1 - m C_2 = 0$$

donde se tira que

$$t = \frac{C_1 - m C_2}{m C_1} \tag{54}$$

Neste caso ainda se verifica que o movimento do quadro galvanométrico é *aperiódico* em virtude de se continuar a notar a ausência de qualquer função sinusoidal. Mas, este caso tem uma importância especial porque ele marca o limite da aperiodicidade e, por isso, toma a designação de **aperiodicidade crítica,** *porque representa o limite da passagem do movimento aperiódico para o movimento periódico,* porquanto basta um ligeiro acréscimo de *n* sobre *m* para que a expressão

$$\sqrt{m^2 - n^2}$$

se tornar imaginária e envolver logo uma função sinusoidal, como adiante veremos, quando tratarmos do terceiro caso.

No caso, que estamos tratando, o valor do desvio $\theta_t$ obtem-se introduzindo na expressão (52) o valor de t expresso na equação (54) e então temos que

$$\theta_t = \left(C_1 \frac{C_1 - mC_2}{m C_1} + C_2\right) e^{-m \frac{C_1 - mC_2}{m C_1}} = \left(\frac{C_1 - m C_2 + mC_2}{m}\right) e^{\frac{m C_2 - C_1}{C_1}} =$$

$$= \frac{C_1}{m} e^{\frac{m - C_2 - C_1}{C_1}} . \tag{55}$$

Para determinar os valores de $C_1$ e $C_2$ vamos estabelecer as condições iniciais do movimento da equipagem.

Temos aqui também duas condições.

Primeira:

$$t = 0 \quad ; \quad \theta = 0 \quad ; \frac{d\theta}{dt} = \omega_0$$

Segunda:

$$t = 0 \quad ; \quad \theta = \alpha_0 \quad ; \frac{d\theta}{dt} = 0$$

Na primeira condição, temos que a equação (52) se torna

$$\theta = (C_1\, t + C_2)\, e^{-m\,t} = 0 \tag{56}$$

donde

$$C_1\, t + C_2 = 0 \qquad \text{pelo que} \qquad C_1 = -\frac{C_2}{t} \qquad \text{e} \qquad -C_2 = Ct$$

e a equação (53) virá

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C_1\, e^{mt} - m\,(C_1\, t + C_2)\, e^{mt}}{e^{(mt)^2}} = \omega_o$$

ou

$$\omega_o = \frac{C_1 - m\, C_1\, t + m\, C_2\, t}{e^{mt}} \tag{57}$$

Introduzindo nesta equação os valores de $C_1$ e de $C_2$ obtêm-se para valor destas constantes as seguintes expressões:

$$\omega_o = \frac{C_1 - m\, C_1\, t + m\, C_1\, t}{e^{mt}} = \frac{C_1}{e^{mt}}$$

donde

$$C_1 = \omega_o\, e^{mt} \tag{58}$$

e

$$\omega_o = \frac{-\dfrac{C_2}{t} + m\,\dfrac{C_2\, t}{t} - m\, C_2\, t}{e^{mt}} = -\frac{C_2}{te^{mt}}$$

donde

$$C_2 = -\,\omega_o te^{mt} \tag{59}$$

Como na condição inicial ficou estabelecido que

$$t = 0\,,$$

as equações (58) e (59) tornam-se

$$C_1 = \omega_o \qquad \text{e} \qquad C_2 = 0$$

o que, introduzido em (54) e (55), dá os seguintes valores para t e $\theta_t$

$$t = \frac{\omega_o}{m\,\omega_o} = \frac{1}{m} \tag{60}$$

e

$$\theta_t = \frac{\omega_o}{m}\, e^{-\frac{\omega_o}{\omega_o}} = \frac{\omega_o}{m} \cdot \frac{1}{e} \tag{61}$$

As equações (60) e (61) mostram *que o desvio da equipagem é igual à velocidade inicial, e, no instante em que a mesma se desloca, este desvio é independente desta velocidade.*

Vejamos agora a segunda condição inicial.

$$\theta = (C_1\, t + C_2)\, e^{-mt} = \alpha_o$$

donde

$$C_1\, t + C_2 = \alpha_o\, e^{mt} \tag{62}$$

e

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C_1\, e^{mt} - m\,(C_1\, t + C_2)\, e^{mt}}{e^{(mt)^2}} = 0$$

ou seja

$$C_1 - m\,C_1\,t - m\,C_2 = 0$$

ou

$$\frac{C_1}{m} = C_1\,t + C_2 = \alpha_0\,e^{mt}$$

conforme (62). Daqui se deduz que

$$C_1 = m\,\alpha_0\,e^{mt} \tag{63}$$

Para $C_2$ vem

$$C_1 - m\,C_1\,t = m\,C_2$$

donde se tira que

$$C_1 = \frac{m\,C_2}{1 - m\,t} \tag{64}$$

Introduzindo o valor da equação (64) na equação (62) vem

$$\frac{m\,C_2\,t}{1 - m\,t} + C_2 = \alpha_0\,e^{mt}$$

Daqui se tira que

$$C_2 = (1 - m\,t)\,\alpha_0\,e^{mt} \tag{65}$$

Introduzindo em (63) e (65) a condição estabelecida de ser t nulo virá

$$C_1 = m\,\alpha_0 \quad \text{e} \quad C_2 = \alpha_0$$

Conhecidos os valores das constantes $C_1$ e $C_2$ para as condições iniciais estabelecidas, podemos introduzi-las em (54) e 55) e obtemos assim que

$$t = \frac{C_1 - mC_2}{m\,C_1} = \frac{m\,\alpha_0 - m\,\alpha_0}{m^2\,\alpha_0} = 0 \tag{66}$$

e

$$\theta_t = (C_1\,t + C_2)\,e^{-mt} = (m\,\alpha_0\,t + \alpha_0)\,e^{-mt} = (m\,t + 1)\,\alpha_0\,e^{-mt}\,. \tag{67}$$

As curvas, que indicam como se opera o movimento da equipagem, continuam a ser idênticas às representadas nas figuras 3 e 4, conforme se trata da primeira ou da segunda condição.

Vamos agora analisar o *terceiro caso.*

$$m < n \;;\; \sqrt{m^2 - n^2} < 0 \;;\; m^2 - n^2 = (-p)^2$$

ou seja

$$\sqrt{m^2 - n^2} = \sqrt{(-p)^2} = \omega\sqrt{-1} = \omega\,i$$

Nestas circunstâncias, a solução geral toma a seguinte forma

$$\theta = C_1\,e^{(-m + \sqrt{m^2 - n^2})\,t} + C_2\,e^{(-m - \sqrt{m^2 - n^2})\,t} = C_1\,e^{(-m + \omega i)\,t} + C_2\,e^{(-m - \omega i)\,t} =$$

$$= e^{-m\,t}\left(C_1\,e^{\omega i t} + C_2\,e^{-\omega i t}\right) \tag{68}$$

A bem conhecida relação de Euler permite eliminar as funções exponenciais imaginárias e, assim, temos que

$$e^{\omega it} = \cos\omega t + i \operatorname{sen} \omega t \quad e \quad e^{\omega it} = \cos\omega t - i \operatorname{sen}\omega t$$

que, introduzidas em (68), dá

$$\begin{aligned} \theta &= e^{-mt} [C_1 (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) + C_2 (\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t)] = \\ &= e^{-mt} C(_1 \cos \omega t + C_1 i \operatorname{sen} \omega t + C_2 \cos \omega t - C_2 i \operatorname{sen} \omega t) = \\ &= e^{-mt} [(C_1 + C_2) \cos \omega t - (C_2 - C_1) i \operatorname{sen} \omega t] \end{aligned} \tag{69}$$

A presença de funções sinusoidais na equação (69) mostra-nos que neste caso o movimento oscilante da equipagem é de natureza periódica, o que significa que a equipagem desviada da sua posição inicial, e uma vez cessada a acção que provocou o desvio, só volta à posição de repouso após uma série de oscilações cuja amplitude vai diminuindo até aquelas se anularem por completo.

Vamos ver em que condições é que estas oscilações se produzem.

Para isso vamos estabelecer as condições iniciais de movimento, que são análogas às que estabelecemos para os dois casos anteriores.

A primeira condição inicial que estabelecemos foi

$$t = 0 \quad ; \quad \theta = 0 \quad ; \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_0$$

Vamos aplica-la à equação (69) e assim temos

$$\theta = e^{-mt} [C_1 (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) + C_2 (\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t)] = 0$$

como

$$e^{-mt} \neq 0$$

será

$$C_1 (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) + C_2 (\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) = 0 \tag{70}$$

Da mesma forma

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= - m e^{-mt} \Big[ C_1 (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) + C_2 (\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) \Big] + \\ &+ e^{-mt} \Big[ C_1 (-\omega \operatorname{sen} \omega t + i\omega \cos \omega t) + C_2 (-\omega \operatorname{sen} \omega t - i \omega \cos \omega t) \Big] = \\ &= e^{-mt} \Big[ C_1 (i \omega \cos \omega t - m \cos \omega t - m i \operatorname{sen} \omega t - \omega \operatorname{sen} \omega t) + \\ &\quad + C_2 (m i \operatorname{sen} \omega t - \omega \operatorname{sen} \omega t - m \cos \omega t - i \omega \cos \omega t) \Big] = \omega_0 \end{aligned}$$

donde se tira que

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0}{e^{-mt}} = \omega_0 e^{-mt} &= C_1 (i \omega \cos \omega t - m \cos \omega t - m i \operatorname{sen} \omega t - \omega \operatorname{sen} \omega t) + \\ &+ C_2 (m i \operatorname{sen} \omega t - \omega \operatorname{sen} \omega t - m \cos \omega t - i \omega \cos \omega t) \end{aligned} \tag{71}$$

As equações (70) e (71) vão permitir-nos determinar os valores de $C_1$ e $C_2$ e, assim, deduzimos da equação (70) que

$$C_1 = - C_2 \frac{\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t}{\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t} \quad e \quad C_2 = - C_1 \frac{\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t}{\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t} \tag{72}$$

Introduzindo, sucessivamente, estes valores na equação (71) temos para deduzir o valor de $C_2$ a seguinte expressão:

$$\omega_0 \, e^{mt} = - C_2 \frac{\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t}{\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t} (i \omega \cos \omega t - m \cos \omega t - m i \operatorname{sen} \omega t - \omega \operatorname{sen} \omega t) +$$

$$+ C_2 (m i \operatorname{sen} \omega t - \omega \operatorname{sen} \omega t - m \cos \omega t - i \omega \cos \omega t)$$

donde

$$C_2 = \tag{73}$$

$$= \frac{\omega_0 e^{mt} (\cos\omega t + \operatorname{sen}\omega t)}{-(\cos\omega t - i\operatorname{sen}\omega t)(i\omega\cos\omega t - m\cos\omega t - mi\operatorname{sen}\omega t - \omega\operatorname{sen}\omega t) + (\cos\omega t + i\operatorname{sen}\omega t)(mi\operatorname{sen}\omega t - \omega\operatorname{sen}\omega t - m\omega\cos\omega t - i\omega\cos\omega t}$$

e

$$C_1 = \tag{74}$$

$$= \frac{\omega_0 e^{mt} (\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t)}{(\cos\omega t - i\operatorname{sen}\omega t)(i\omega\cos\omega t - m\cos\omega t - mi\operatorname{sen}\omega t - \omega\operatorname{sen}\omega t) - (\cos\omega t + i\operatorname{sen}\omega t)(mi\operatorname{sen}\omega t - \omega\operatorname{sen}\omega t - m\cos\omega t - i\omega\cos\omega t)}$$

Para fixar os valores de $C_1$ e $C_2$ basta completar a respectiva condição inicial de $t$ ser nulo e, assim, teremos que para

$$t = 0 \quad \text{virá} \quad \operatorname{sen}\omega t = 0 \quad \text{e} \quad \cos\omega t = 1$$

Logo, as expressões (73) e (74) transformar-se-ão nas seguintes:

$$C_1 = - \frac{\omega_0}{(i\omega - m) - (-m - i\omega)} = \frac{\omega_0}{2 i \omega} \tag{75}$$

$$C_2 = - \frac{\omega_0}{(-m + i\omega) - (-m - i\omega)} = - \frac{\omega_0}{2 i \omega} \tag{76}$$

Somando e subtraindo, sucessivamente, membro a membro (75) e (76) vem

$$C_1 + C_2 = \frac{\omega}{2 i \omega} - \frac{\omega_0}{2 i \omega} = 0 \tag{77}$$

$$C_2 - C_1 = - \frac{\omega}{2 i \omega} - \frac{\omega_0}{2 i \omega} = - \frac{\omega_0}{i\omega} \tag{78}$$

Se introduzirmos (77) e (78) na equação (69) vem

$$\theta_t = \frac{\omega_0}{i \omega} e^{-mt} i \operatorname{sen}\omega t = \frac{\omega_0}{\omega} e^{-mt} \operatorname{sen}\omega t \tag{79}$$

A presença de um factor sinusoidal mostra-nos que o movimento do quadro, ao passar pelo zero da escala, não se anula, e que o mesmo continua a oscilar. Logo, o movimento é periódico, como já atrás tínhamos dito. Mas, a presença do factor $\frac{1}{t}$, a que se dá o nome de *factor de amortecimento,* mostra-nos igualmente que o movimento se vai amortecendo, do que se conclui que o movimento das oscilações é *periódico amortecido.*

Gràficamente, o movimento pode ser representado pela fig. 5.

Para deduzir o tempo da duração das oscilações, vamos determinar o valor da velocidade $\frac{d\theta}{dt}$ que a equipágem móvel adquire a cada momento. Derivemos, pois, a equação (79) e teremos

$$\frac{d\theta}{dt} = -m\frac{\omega_0}{\omega}e^{-mt}\,\text{sen}\,\omega t + \frac{\omega_0}{\omega}e^{-mt}\,\omega\cos\omega t = \frac{\omega_0}{\omega}e^{-mt}(-m\,\text{sen}\,\omega t + \omega\cos\omega t) \tag{80}$$

Os máximos e mínimos do desvio $\theta$ obter-se-ão para todos os valores de t para os quais

$$\frac{d\theta}{dt} = 0$$

Portanto,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega_0}{\omega}e^{-mt}(-m\,\text{sen}\,\omega t + \omega\cos\omega t) = 0$$

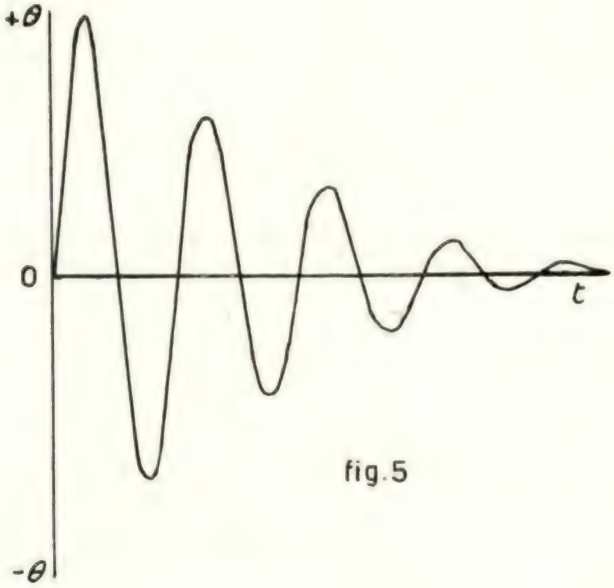



fig.5

Para obter os momentos em que a oscilação muda de sinal basta fazer

$$-m\,\text{sen}\,\omega t + \cos\omega t = 0$$

visto que

$$\frac{\omega_0}{\omega}e^{-mt} \neq 0\,.$$

Portanto, ter-se-á que

$$m\,\text{sen}\,\omega t = \omega\cos\omega t$$

donde

$$\frac{\text{sen}\,\omega t}{\cos\omega t} = \frac{\omega}{m} = \text{tg}\,\omega t \tag{81}$$

ou

$$\omega t = \text{arc}\,.\,\text{tg}\,\frac{\omega}{m}$$

pelo que

$$t = \frac{\text{arc}\,.\,\text{tg}\,\frac{\omega}{m}}{\omega} \tag{82}$$

Esta expressão dará, portanto, o valor do tempo t correspondente aos máximos e mínimos das oscilações sucessivas.

Façamos

$$\omega t = \text{arc} \,.\, \text{tg} \frac{\omega}{m} = \varphi + k\pi \tag{83}$$

Se, quisermos determinar o tempo que medeia entre o máximo e o mínimo da oscilação de ordem k e a de ordem k — 1, basta tomar a diferença entre o tempo que decorre entre o começo da primeira oscilação de ordem k e a de ordem (k — 1) e então teremos que

$$t_k - t_{k-1} = \frac{\varphi + k\pi}{\omega} - \frac{\varphi + (k-1)\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega} = C^{te}$$

Esta diferença corresponde à duração de uma oscilação simples $\frac{T}{2}$. Logo

$$\frac{T}{2} = t_k - t_{k-1} = \frac{\pi}{\omega} \tag{84}$$

T representa, portanto, o período de oscilação amortecida. Da equação (84) tira-se que

$$T = 2 \,.\, \frac{\pi}{\omega} \tag{85}$$

Esta expressão mostra *que o tempo que medeia entre dois máximos e dois mínimos é igual a um período T*.

Podemos agora determinar o valor do desvio do quadro num dado momento $t_k$. Para isso, basta introduzir o valor de t, representado pela equação (82), na fórmula (79), depois de termos substituído o valor de $\text{sen}\,\omega t$ pelas relações que resultaram das condições estabelecidas.

Da relação (81) obtemos que

$$\frac{\omega^2}{m^2} = \text{tg}^2\, \omega t \tag{86}$$

ou

$$1 + \frac{\omega^2}{m^2} = 1 + \text{tg}^2\, \omega t \tag{87}$$

Mas, como sabemos,

$$\text{sen}^2\, \omega t = \frac{1}{1 + \text{cog}^2\, \omega t} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\text{tg}^2\, \omega t}} = \frac{\text{tg}^2\, \omega t}{1 + \text{tg}^2\, \omega t}$$

Introduzindo nesta expressão os valores de (86) e (87) vem

$$\text{sen}^2\, \omega t = \frac{\frac{\omega^2}{m^2}}{1 + \frac{\omega^2}{m^2}} = \frac{\omega^2}{m^2 + \omega^2}$$

donde se tira que

$$\text{sen}\, \omega t = \frac{\omega}{\sqrt{m^2 + \omega^2}} \tag{88}$$

A equação (79), substituídos os termos sen $\omega t$ e t da função exponencial pelos valores das equações (87) e (88), transforma-se na seguinte:

$$\theta_k = \frac{\omega}{\omega_0} e^{-m \frac{\text{arc. tg} \frac{\omega}{m}}{\omega}} \times \frac{\omega}{\sqrt{m^2 + \omega^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{m^2 + \omega^2}} e^{-\frac{m}{\omega} \text{arc. tg} \frac{m}{\omega}} \tag{89}$$

Esta equação corresponde à oscilação de ordem k. Se, considerarmos agora a oscilação de ordem (k — 1), a equação correspondente a esta oscilação será representada pela expressão

$$\theta_{(k-1)} = \frac{\omega_0}{\sqrt{m^2 + \omega^2}} e^{-\frac{m}{\omega}\left(\text{arc. tg} \frac{\omega}{m} - \pi\right)} \tag{90}$$

Dividindo membro a membro as equações (89) e (90) temos

$$\frac{\theta_k}{\theta_{(k-1)}} = \frac{\frac{\omega^0}{\sqrt{m^2 + \omega^2}} e^{-\frac{m}{\omega} \text{arc. tg} \frac{\omega}{m}}}{\frac{\omega_0}{\sqrt{m^2 + \omega^2}} e^{-\frac{m}{\omega}\left(\text{arc. tg} \frac{\omega}{m} - \pi\right)}} = \frac{e^{-\frac{m}{\omega} \text{arc. tg} \frac{\omega}{m}}}{e^{-\frac{m}{\omega} \text{arc. tg} \frac{\omega}{m}} - e^{-\frac{m}{\omega} \pi}} = e^{\frac{m}{\omega} \pi} \tag{91}$$

Temos, assim, o valor da relação entre duas oscilações sucessivas de ordem k e (k−1). Mas, pela relação (84), temos que

$$\frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}.$$

Logo, substituindo em (91), temos

$$\frac{\theta_k}{\theta_{(k-1)}} = e^{m \frac{T}{2}} . = e^{\lambda} , \tag{92}$$

fazendo, é claro,

$$m \frac{T}{2} = \lambda \tag{93}$$

À expressão (93) dá-se o nome de **decremento logaritmico** porque ela representa o logaritmo neperiano da relação da amplitude de duas oscilações sucessivas da mesma ordem, isto é,

$$\lambda = \log_e \frac{\theta_k}{\theta_{(k-1)}} . \tag{94}$$

Se tomarmos as relações entre as oscilações sucessivas, verificamos que esta relação se mantém constante e igual a $e^{\lambda}$, equação (92). Observa-se mais: que esta expressão no caso do movimento oscilatório amortecido, representa a razão duma progressão geométrica decrescente segundo a qual as amplitudes das oscilações se vão amortecendo.

Se considerarmos o quadro da equipagem em oscilação livre, isto é, sem amortecimentos, a duração da oscilação será representado pela expressão

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{B}} = \frac{2\pi}{n} \tag{95}$$

visto termos feito, a propósito da equação (22),

$$n^2 = \frac{B}{I} \tag{96}$$

Podemos exprimir a oscilação forçada ou amortecida T em função da oscilação livre $T_0$ e do decremento longarítmico $\lambda$.

A expressão (85) diz-nos que

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{n^2 - m^2}} \tag{97}$$

visto que puzemos

$$\omega i = \sqrt{m^2 - n^2} \quad \text{ou} \quad \omega = \sqrt{n^2 - m^2}$$

como é evidente.

Da equação (93) tiramos que

$$m^2 = \frac{4\lambda^2}{T^2} \tag{98}$$

e da (95)

$$n^2 = \frac{4n^2}{T_0^2}\,. \tag{99}$$

Substituindo na equação (97) os valores $n^2$ e $m^2$ pelos das equações (98) e (99) vem

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{4\lambda^2}{T^2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^2}{T_0^2} - \frac{\lambda^2}{T^2}}}\,. \tag{100}$$

Desta expressão deduz-se, como é fácil de ver, que

$$T = T_0 \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}} = T_0 \left(1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{101}$$

e que também pode ser apresentada da seguinte forma, desenvolvendo em série e aproveitando só os dois primeiros termos,

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\pi^2}\right) \tag{102}$$

a qual só é utilisada quando $\lambda$ é muito pequeno.

A fórmula (101) também se pode apresentar da seguinte forma:

$$T = \frac{T_0}{\pi} \sqrt{\pi^2 + \lambda^2}\,. \tag{103}$$

Vamos, portanto, aproveitar estes valores para os introduzir na equação (89). Para isso, vamos considerar que $k = 0$. Neste caso, $\theta_0$ representará o valor da primeira oscilação. Logo

$$\theta_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{m^2 + \omega^2}}\, e^{-\frac{m}{\omega} \text{arc. tg} \frac{\omega}{m}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{m^2 + n^2 - m^2}}\, e^{-\frac{m}{\omega} \text{arc. tg} \frac{\omega}{m}} = \frac{\omega_0}{n}\, e^{-\frac{m}{\omega} \text{arc. tg} \frac{\omega}{m}} \tag{104}$$

Mas, como

$$n = \frac{2\pi}{T_o} \quad e \quad T_o = \frac{T\pi}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}$$

e substituindo em (102) $m$ e $\omega$ pelas expressões deduzidas das equações (85) e (93) temos que

$$\theta_o = \frac{\omega_o}{\frac{2\pi}{T_o}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{arc.tg} \frac{\pi}{\lambda}} = \frac{\omega_o}{2} \frac{T_o}{\pi} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{arc.tg} \frac{\pi}{\lambda}} = \frac{\omega_o}{2} \frac{T}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{arc.tg} \frac{\pi}{\lambda}} \tag{103}$$

Esta fórmula vai-nos permitir representar $\theta_o$ em função da quantidade de electricidade que é lançada no circuito galvanométrico, ao mesmo tempo que definiremos uma constante muito importante nos galvanómetros conhecida sob a designação de **Constante balística** do galvanómetro.

Para isso, vamos supor que no circuito da equipagem móvel fazemos passar instantâneamente uma corrente $i$ de tal forma que os binários antagonistas devidos ao atrito no ar, às correntes induzidas e à torsão da suspensão são tão pequenos em face do momento de reacção de inércia do quadro que os podemos desprezar. Nestas condições, a equação do movimento do quadro, representada pela expressão (21) fica reduzida aos seguintes termos:

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = HSNi \tag{104}$$

Multiplicando ambos os membros por $dt$ e integrando a equação entre 0 e $\tau$, que foi o tempo que o desvio $\theta$ levou a anular-se, teremos que

$$I \frac{d\theta}{dt} = HSN \int_o^T i dt = HSNq$$

ou

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{HSNq}{I} \tag{105}$$

Será, portanto, $q$ a quantidade de electricidade que foi lançada no galvanómetro. Podemos, pois, considerar $\frac{d\theta}{dt}$ como a velocidade inicial $\omega_o$ do quadro, isto é,

$$\omega_o = \frac{d\theta}{dt} = \frac{HSNq}{I} , \tag{106}$$

valor que, introduzido na equação (103), dá

$$\theta_o = \frac{HSNq}{I} \frac{T}{2\sqrt{\pi^2 + \gamma^2}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{arc.tg} \frac{\pi}{\lambda}} \tag{107}$$

Podemos exprimir $\theta_o$ em função da oscilação livre do quadro $T_o$ e, para isso, recorremos à relação (103), do que resulta

$$\theta_o = \frac{HSNq}{2I} \cdot \frac{T_o}{\pi} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \text{arc.tg} \frac{\pi}{\lambda}} \tag{108}$$

Daqui deduz-se que a quantidade de electricidade $q$, que atravessou o quadro galvanométrico na oscilação inicial, é igual a

$$q = \frac{2\,I}{HSN} \cdot \frac{\pi}{T_0}\,\theta_0\, e^{\frac{\lambda}{\pi}\,\text{arc. tg}\,\frac{\pi}{\lambda}} \tag{109}$$

ou, fazendo

$$\frac{HSN}{2\,I} \cdot \frac{T_0}{\pi} = K\,, \tag{110}$$

$$q = \frac{1}{K}\,\theta_0\, e^{\frac{\lambda}{\pi}\,\text{arc. tg}\,\frac{\pi}{\lambda}} \tag{111}$$

É ao factor $K$ que se dá a designação de *Constante balística* do galvanómetro para a distinguir da sua *Constante de sensibilidade* que é representada pela letra $k$ e que se deduz da equação de equilíbrio, dos momentos de impulsão devida à corrente $i$ e do esforço de torsão produzido pelo desvio do quadro, quer se trate de um galvanómetro de quadro suspenso, ou de espirais de torsão.

A equação, correspondente ao equilíbrio destes momentos é representada pela expressão

$$B\delta = HSNi$$

donde se tira

$$i = \frac{B}{HSN} \cdot \delta = \frac{\delta}{k} \tag{112}$$

fazendo, é claro,

$$k = \frac{HSN}{B}\,. \tag{113}$$

O valor de B em (113) pode ser substituído, pelas relações (96) e (99) já nossas conhecidas e, assim, temos que

$$B = n^2\,I = \frac{4\,\pi^2}{T_0^2}\,I \tag{114}$$

que introduzida em (113) dá

$$k = \frac{HSN}{\frac{4\,\pi^2}{T_0^2}\,I} = \frac{HSN}{4\,I} \cdot \frac{T_0}{\pi} \cdot \frac{T_0}{\pi} = K\,\frac{T_0}{2\pi} \tag{115}$$

Como $\frac{T_0}{2}$ representa a duração da semi-oscilação podemos fazer

$$\frac{T_0}{2} = T_0'$$

e introduzir este valor na equação (115). Assim, temos que

$$\frac{K}{k} = \frac{\pi}{T_0'} \tag{116}$$

Podemos, ainda, representar a relação das duas constantes em função da semi-oscilação forçada e do respectivo decremento logarítmico. Da equação (103) tiramos que

$$\frac{T_0}{\pi} = \frac{T}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}$$

ou

$$\frac{\pi}{T_0} = \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{T}$$

ou ainda

$$\frac{\pi}{T_0'} = \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{T'} \tag{117}$$

sendo T' o tempo da duração da oscilação simples amortecida. Logo, teremos, a seguinte relação:

$$\frac{K}{k} = \frac{\pi}{T_0'} = \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{T'} \tag{118}$$

Assim, a equação (109) pode ser apresentada sob as seguintes formas:
Em função da constante de sensibilidade

$$q = \frac{1}{k} \cdot \frac{T_0'}{\pi} \theta_0 \, e^{\frac{\lambda}{\pi} \text{arc. tg} \frac{\pi}{\lambda}} \tag{119}$$

Em função da corrente *i* e do desvio $\delta$ correspondente

$$q = \frac{i}{\delta} \cdot \frac{T_0'}{\pi} \theta_0 \, e^{\frac{\lambda}{\pi} \text{arc. tg} \frac{\pi}{\lambda}} \tag{120}$$

Em função do tempo de duração da oscilacão simples T' e do *decremento logarítmico* $\lambda$

$$q = \frac{T'}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \cdot \frac{1}{k} \theta_0 \, e^{\frac{\lambda}{\pi} \text{arc. tg} \frac{\pi}{\lambda}} \tag{121}$$

Sendo

$$k = f(i) \tag{122}$$

é fácil de ver que o seu valor será expresso na unidade em que for expresso *i*, que pode ser representado em amperes ou nos seus submultiplos mais vulgarmente empregados que são em miliamperes ou micro-amperes correspondentes ao desvio de uma divisão da escala do aparelho, conforme o grau de sensibilidade deste, pelo que para

$$\delta = 1 \qquad \text{virá} \qquad k = i \tag{123}$$

A constante K, dependendo essencialmente da constante k, será expressa em Conlombs, se k for expresso em amperes, ou em Micro-Conlombs se k for expresso em Micro-amperes.

A *constante balística* K determina-se pela fórmula (118), depois de conhecido o valor de k e determinado $T'_0$.

O valor de k é determinado de uma vez para sempre, desde que o campo H do iman se mantenha constante, para o que se empregam aços de grande *força coercitiva*. Esta *constante de sensibilidade,* também conhecida por *constante permanente* do galvanómetro, tem bastante importância na construção de aparelhos desta natureza.

*(Continua)*

# Nótula sobre a geomorfogenia de Setúbal

*Do Sr. Dr. Falcão Machado recebemos a nota seguinte:*

É meu costume discutir assuntos científicos sòmente com pessoas de categoria científica e não com outrem; todavia:

1.º) Sem dúvida que a nossa *Nótula sobre a geomorfogenia de Setúbal* não é um trabalho positivo, concreto, com larga base matemática e experimental; trata-se dum estudo hipotético como se verifica pela sua própria redacção, de caracter especulativo e não técnico, e incompatível com o nível técnico da revista, pois a modéstia não nos permite afirmar o contrário.

2.º) Todavia baseia-se na observação dos factos, do terreno, e na interpretação deles à luz do que escreveram Carrington, Freire de Andrade, Orlando Ribeiro, Oliveira Boléo e Herculano de Carvalho, doutores e professores do ensino superior, Choffat (sabe-se o que lhe deve a geologia portuguesa) e Amaro de Almeida, médico, especializado em hidrologia. A nossa hipótese pode ser, pois, conclusão errada, mas de premissas verdadeiras, e até prova em contrário, supomos não ter errado.

3.º) Dizer que o cenozoico, no corte, aparece *indevidamente,* sobre o quaternário é interpretar os símbolos da natureza das rochas, como sendo símbolos da idade geológica das mesmas, o que não é correcto. Mas seja assim, e explicaríamos, comodamente tal facto, por um lapso, se, acaso não quizermos indicar o fenómeno designado por Reibungsbresch por Rinne, também conhecido por *fault-roch* ou *brechas de fricção.*

4.º) Afirmar que são terrenos desagregados os arenitos do Pliocénico será interpretar bem os símbolos? Talvez... mas é desconhecer o terreno *in-loco*... o que invalida todas as conclusões de hidrogeologia que se pretendem tirar, porque são as leis que se hão-de adaptar aos factos e não estes às leis.

5.º) A transcrição mostra a incompreensão do texto, a falta de conhecimento dos estudos actuais sobre as rochas plutónicas da região (e aconselhamos a leitura dos trabalhos recentes de Zbyszewski nas *Comunicações dos Serviços Geológicos*) e falta de capacidade de interpretação do desenho em face do texto como demonstra a leitura serena e imparcial, feita por quem conheça o assunto.

6.º) A mera afirmação de que na nossa nótula há impropriedades e incorrecções, é um dogmatismo *magister dixit ex-cathedra* desprovido do espírito de livre crítica. Não basta afirmar: a probidade mental e a competência científica obrigam a provar a afirmação e a explicar os fenómenos por outra maneira mais evidente e certa. Só assim as falsas hipóteses geram as verdadeiras e a ciência progride: o contrário, é muita confusão e pouco acerto.

FALCÃO MACHADO.

*Com a publicação desta nota consideramos encerrado pela nossa parte o assunto, mantendo muito embora os nossos pontos de vista expressos na nota publicada no n.º 180.*

# Completaram a parte escolar do seu curso no ano lectivo de 1946-47 os nossos colegas:

## ENGENHARIA CIVIL

Fernando Maria Manzanares Abecasis
José Manuel Amorim Ferreira
Mário Rodrigues
António Lobo Vaz Pato
Manuel Augusto Baptista da Conceição
António Godinho do Espírito Santo
António José Ribeiro de Mendonça e João António da Silva Graça Martins
João Tomás Siu
Gil Paiva e Joaquim Maria Pereira dos Reis
Raul Apolónio de Freitas Rodrigues
Carlos Emílio Gomes Martens e Gabriel Machado da Rosa
Alberto Lemos Ferreira e José Pedro Roquete Ricciardi
Celso Carneiro Câmara Pestana e Manuel Rodrigues Martins
Manuel da Silva Ferreira e Raul Gonçalves de Freitas
Humberto Toledo de Paula Pinheiro e Luciano Serra de Oliveira
Francisco Vendrell de Barros Henriques
José Dias Simões Coelho e João Pires Marques Maia
António Fialho Rosa Mendes
José da Cunha dos Santos Pato e Carlos Afonso Albuquerque Schmidt
Fernando Vieira de Campos e João Fernando Cansado Tavares
Augusto de Morais Jalles, Carlos da Veiga Lopes Jordão e Raul Manuel Silva de Andrade
Francisco Manuel Rebelo de Andrade e José de Campos Pessanha Barbosa
Francisco Pais de Azevedo
Ruy Pereira Ramalho Ortigão

## ENGENHARIA DE MINAS

José Pereira de Sampaio Quintino Rogado
Claudino Martins Vicente e José Augusto Rocha Simões
Fernando de Abreu e Lima de Freitas e José Fernandes Rebolo
José da Costa Carvalho Talone
Júlio Gil Laranjeira
Diamantino Henriques Mendonça
João Anacleto Telo
Francisco Ferreira de Almeida

## ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA

Fernando Ivo Coelho Gonçalves
Eduardo Taborda Ferreira
Armando Pereira dos Reis Miranda
António dos Reis Baptista
Fernando José Franco Feijóo
António Fernandes dos Santos, José Pinto dos Santos, José António da Cunha Róla Pereira e Octávio de Carvalho Lopes Monteiro
Alberto da Silveira e Lorena Ermida e Angelo de Carvalho Oliveira
António Borges de Frias e António Libano Monteiro
Augusto Dias da Silva
José Rodrigues Telles Manso de Carvalho
Carlos Pires da Silva, Leonel Rodrigues Lobo e João Abrantes Varela
Helcias dos Santos Ferreira e Luís Quinhones Godinho
António de Almeida Duarte
Carlos Gouveia Pinto
Joaquim Neto Valente

## ENGENHARIA MECANICA

José Torres Raimundo
Fernando António de Almeida Alves
Oliveiros Domingos
António Vasconcelos
Gualdim Nogueira Mendes e Anselmo da Rocha Barros
David Valente de Almeida
António Moreira de Andrade
José Jorge Canelas

## ENGENHARIA QUÍMICO-INDUSTRIAL

Manuel Chagas Roquette
Virgílio Teixeira Lopo
Fernando Pereira da Costa da Silva Mendes
Vítor Martins Coimbra
António Brazão Farinha
José Júlio da Silva Coelho
Maria Luísa Rebelo Gemes, Maria Estelina de Contreiras Maia e Francisco da Silveira Saragoça
João Conde Pereira
Jaime Lopes Ferro, Jacques Pessoa Rolão e João Paulo de Matos
Gullherme Purvin de Figueiredo
Maria Luísa de Brito Jalhay
João da Costa Soares

# 2.º CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA (1)

## LISBOA — PORTO — JUNHO DE 1948

C. D. 62 (063) (469)

Receamos que muitos engenheiros não tenham ainda sentido a importância — a transscendência, mesmo — que poderá representar para os interesses individuais de cada um, e para os interesses da classe e da nação, a próxima realização do 2.º congresso nacional dos engenheiros portugueses — todavia não faltam mais que três meses(1) e três meses passam como um relâmpago.

Nomenclaturas do vocabulário social tais como *«congressos»*, *«conferências»*, etc., ruidosamente aplicadas com uma frequência cotidiana que banaliza, habituaram-nos já a tão repetido esvasiamento de resultados, que nos fizemos impermeáveis e insensíveis aos pregões clamorosos que as propagandeiam à nossa volta. Por isso, desprestigiadas como estão aquelas nomenclaturas, acontecimentos, que nos deviam tocar fundo e de perto, não conseguem se quer distrair-nos da luta rija pelo pão de cada dia, a que nos amarra o condicionalismo realista da época que vivemos. É este estado de espírito, bastante generalizado, que pode ser tornado responsável pelo frio desinteresse de muitos engenheiros pelo 2.º Congresso Nacional de Engenharia.

Grave perigo para a classe, prejuízos sérios para cada um de nós, poleriam ocorrer, um dia, se não fossemos capazes de aprender a tempo que para nós, engenheiros, o *Congresso de Engenharia* não é qualquer *congresso*.

Tantos problemas que nós, engenheiros portugueses, precisamos de abordar e resolver, com urgência e decisão, sob pena de deixarmos que, irremediàvelmente, outros tomem os nossos lugares.

— *Problemas profissionais* — (regulação da profissão com misteres afins, melhor nivelamento de remunerações, etc.), que nos apertam com agudesa crescente.

— *Problemas de classe* — possibilidade e enormes vantagens de maior conveniência e solidariedade de previdências, de intercâmbios e inter-auxílio.

— *Problemas técnicos* — a necessidade de pôr em comum as experiências de cada qual e de, a partir delas, discutir e divulgar os métodos e os processos que conduzem às soluções que melhor se integram no nosso meio.

— *Problemas nacionais* — numa fase da evolução dos povos, onde aqueles que forem incapazes de produzir até ao limite da sua capacidade, ficarão no caminho, nós não podemos abstermo-nos, indiferentes e impassíveis, pois que a produção não arrancará sem a chefia segura dos engenheiros.

Depois, embora em plano mais secundário, o congresso proporcionará oportunidades preciosas:

— de visitar alguns dos nossos principais centros fabris, o que, actualizando e rectificando os nossos conhecimentos, nos dará melhor a medida dos recursos do país;

— de contacto, camaradagem e confraternização, estendendo e apertando as nossas relações na classe; conheceremos novos colegas, tornaremos a ver velhos amigos e camaradas, o que, além de muito agradável, pode, por vezes, ter influência vital no nosso futuro.

Não esqueçamos, pois, o nosso congresso.

Levemos lá as nossas sugestões, prestemos-lhe toda a colaboração possível, associemo-nos com todo o entusiasmo.

A Comissão de Propaganda

(1) Termina já, no dia 31 de Março, o prazo de entrega das teses e comunicações.

(1) O regulamento do congresso foi publicado na «Técnica» de Janeiro, págs. 719 a 721.

# BIBLIOTECA

Pedimos a todos os sócios da Associação, que possuem, requisitados, livros da nossa Biblioteca, o favor de os entregar o mais ràpidamente possível.

Depende da satisfação deste pedido, a reorganização mais rápida dos serviços da Biblioteca.

## REVISTAS

| | C. D. | |
|---|---|---|
| Aeroplane (The), n.º 1912 | 629.13 | Inglaterra |
| Boletim da Junta Nacional da Cortiça, n.ºs 109 e 110 | 679 | Portugal |
| Bulletin du Congrès des Chemins de Fer, n.º 12, 1947 | 385 | Bélgica |
| Cemento y Hormigón, n.º 166 | 666.9:624 | Espanha |
| Chronique des Mines Coloniales (La), n.ºs 131 a 136 | 622 | França |
| Ciencia y Tecnica, n.ºs 547, 548 | 62/69 | Argentina |
| Dyna, n.º 12, 1947, n.ºs 1 e 2, 1948 | 62/69 | Espanha |
| Engenheiro Westinghouse (O), Fev.º, 1948 | 621.3 | E. U. A |
| Gazeta dos Caminhos de Ferro, n.ºs 1443 e 1444 | 385 | Portugal |
| Gazeta de Física, n.º 5 | 53 | Portugal |
| Indústria Portuguesa, n.º 238 | 62/69 | Portugal |
| Ossature Metalique, n.º 1, 1948 | 624.014 | Bélgica |
| Revista Electrotécnica, n.º 12, 1947 | 621.3 | Argentina |
| Revista da Ordem dos Engenheiros, n.º 48 | 62 | Portugal |
| Revista do Sindicato Nacional dos Engenheiros Auxiliares, n.ºs 21 e 22 | 62/69 | Portugal |

## FICHEIRO

Sob esta rubrica, figuram só as fichas dos artigos que nos mereceram maior atenção e estão contidos nas revistas recebidas nesta Biblioteca.

Estão já à disposição dos nossos leitores os serviços do ficheiro respeitante às revistas que possuímos.

### Direito

C. D. 328

**La alteración de los niveles urbanos, etc.** — *Spota, A. G.*
Ciencia y Técnica, vol. 110, n.º 547, 1948, pág. 31/60.

La acción por resarcimiento de los daños causados por la alteración de los niveles urbanos es susceptible de ser expropiatoria o cuasi-delictual o delictual, según que los perjuicios se deban exclusivamente a la obra pública o que reconozcan su causa adecuada en un acto ilícito. Ahora. ¿si una acción ha sido encubierta con el ropaje de la acción expropiatoria, no obstante ser inherente a la responsabilidad extracontractual, puede la Administración demostrar la verdadera naturaleza de la acción deducida? El problema tiene alcances prácticos, sobre todo en materia de la prescripción aplicable. En este estudio se considera el mismo, analizándose las distintas posiciones doctrinarias que se han adoptado entre los autores.

### Ensino

C. D. 378.1

**Pensar y trabajar con las manos** — *Durelli, A. J.*
Ciencia y Técnica, vol. 110, n.º 548, 1948, pág. 113/120.

En Francia, sobre todo entre las dos guerras, se reflexionó mucho sobre la forma de unir el pensamiento y la acción. Una de las propuestas fué el «servicio civil». En los Estados Unidos, actualmente, el trabajador intelectual debe dedicar muchas horas de trabajo manual a su casa ejerciendo varios oficios. Se ven algunos profesores universitarios que barren la calle y la vereda. Consideraciones acerca de la educación integral, acerca de la natalidad y acerca de la dignidad humana.

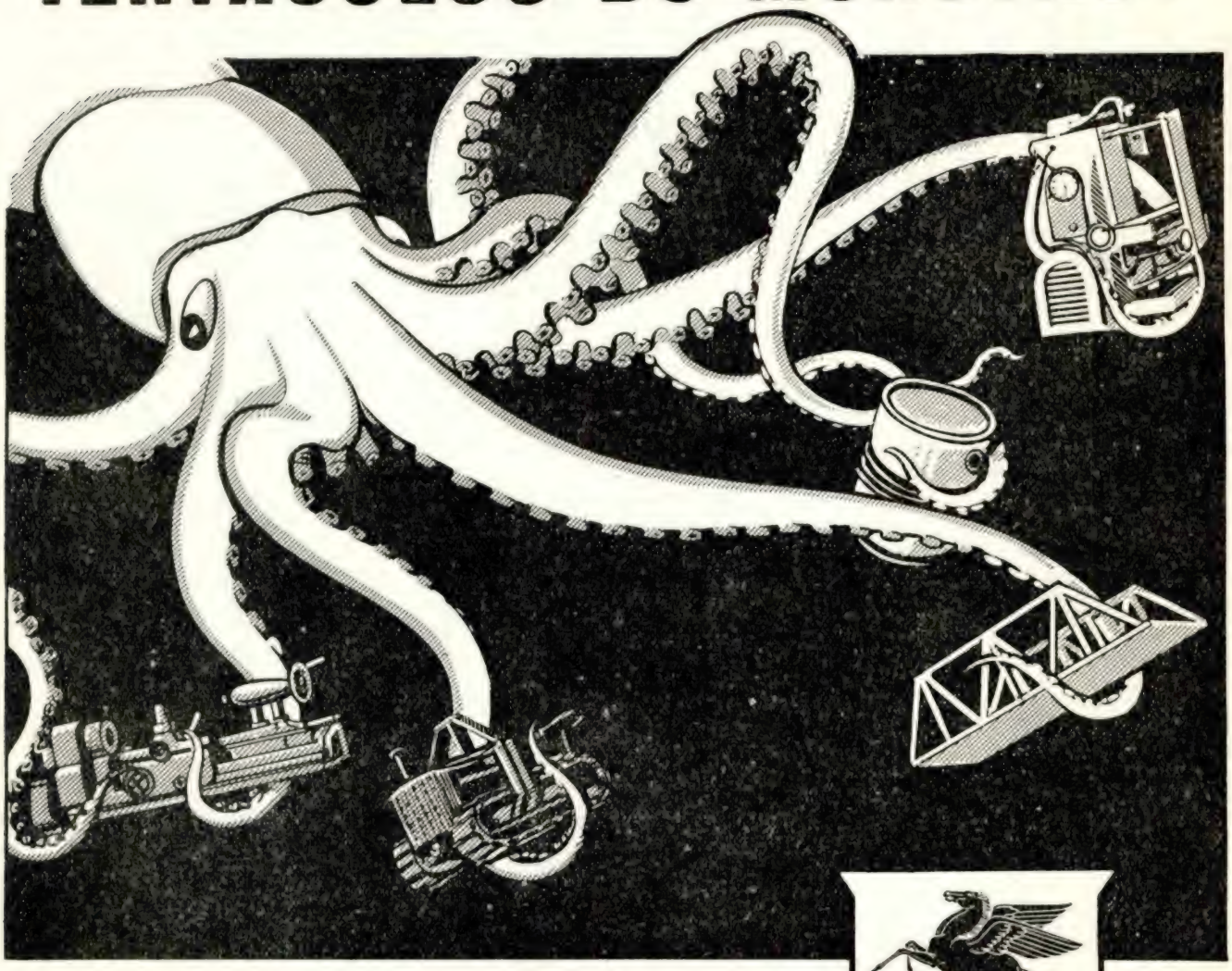
### Elasticidade

C. D. 539.3

**Sobre la aplicación de diferencias finitas, etc.** — *Jauregui (H.), E. M.*
Ciencia y Técnica, vol. 110, n.º 548, 1948, pág. 61/78.

La aplicación de diferencias finitas a los problemas de pandeo, permite encarar en forma práctica y con poco trabajo material, la obtención de cargas críticas de piezas rectas y curvas, de momento de inercia y sección variables con cargas intermedias.

# DEFENDA-SE DOS TENTÁCULOS DO MONSTRO!



A ferrugem — eis a grande inimiga! Não deixe que ela se aposse das suas máquinas, ferramentas, acessórios e utensílios domésticos ou de lavoura; numa palavra: de todas as superfícies metálicas expostas à acção do tempo.

Os novos produtos da série dos «Sova-Kote» (anti--ferrugem) protegem contra a humidade, a chuva e a água salgada, garantindo uma protecção quase permanente.

Aplica-se a pincel ou escova, por banho e ainda por pulverização ou circulação.

Podem evitar-se perdas elevadas por deteriorização de numerosas peças metálicas, às vezes difíceis de substituir, guiando-se pela Tabela de Recomendação dos «Sova-Kote».

Uma série de novos produtos da Socony-Vacuum.

SOCONY-VACUUM

# SOVA-KOTE

## PRODUTOS ANTI-FERRUGEM

2169

SOCONY-VACUUM OIL COMPANY, INC.

## Caminhos de Ferro

C. D. 621 132 (.73)

**Locomotive à turbine á vapeur à engrenages, du Pennsylvania Railroad.**

Bull. du Congrès des Chemins de Fer, 11-947, n.º 11, pág. 996.

## Electrotecnia Geral

C. D. 621.3:626

**La electrificación de Francia** — *Huvelin, P.*

Clencia y Técnica, vol. 110, n.º 547, 1948, pág. 1/17.

El autor hace un rápido análisis de los problemas planteados por el aprovechamiento hidroeléctrico en Francia para conseguir, por un lado, el equilibrio de los regimenes hidrológicos y productivos de las distintas regiones por la interconexión general y transporte de fuerza a gran distancia, y por otra parte, realizar la regularización de los rios por medio de grandes embalses que permiten una mejor utilización del agua y la producción más económica de energia.

## Centrais

C. D. 621.31

**Progressos na geração de energia** — *Anônimo.*

O Engenheiro Westinghouse, 12-947, vol. III, n.º 6, pág. 190.

C. D. 621.31

**Tendencias en la construcción de las centrales eléc-electricas norteamericanas e inglesas** — *Franco Liceni.*

Revista Electrotécnica, 11-947, vol. 53, n.º 11, pág. 463/474.

En este artículo se describen las características principales de las nuevas supercentrales estadounidenses e inglesas, tratando de deducir los critérios con que los técnicos de dichos países las proyectan.

## Máquinas eléctricas

C. D. 621.89

**Recent development of bearings and lubrication systems for vertical generators** — *S. Gynt.*

Asea Juvenal, 4-6-947, vol. 20, n.º 4-6, pág. 72 87.

This article describes the type of beasings and the lubricating systems used today in all vertical Asea generators. The designs described are characterized by the highest obtainable reliability in service coupled with simplicity of maintenance and inspection.

C. D. 621.313

**Estudio general de las máquinas de indución estáticas y giratorias por el diagrama circular de Blondel** (continuação) — *J. Froidevaux.*

R. Electrotécnica, 11-947, vol. 33, n.º 11, pág. 475/486.

1.ª parte.

Capítulo III — Aplicacion del diagrama circular al estudio de los hornos de induccion.

C. D. 621.313

**Estudio general de las maquinas de inducción estaticas y giratorias por el diagrama circular de Blondel** — *J. Froideraux.*

Revista Electrotecnica, 10-947, vol. 33, n.º 10, pág. 419/438.

1.ª parte.

Capítulo I — Estudio general del funccionamiento dc los aparatos estáticos de inducción por medio del diagrama circular.

Capítulo II — Aplicacion del diagrama circular e Blondel al estudio de los transformadores.

## Redes

C. D 621.315

**Ábaco para el cálculo de líneas aéreas y subteráneas de una red de distribución eléctrica de baja tensión** — *Jean Parizy.*

R. Electrotécnica, 10-947, vol. 33, n.º 10, pág. 439/444.

Permite admitiéndo algunas aproximaciones y simplificaciones, resolver rapidamente los problemas que se presentan con frecuencia en la exploración de redes eléctricas de baja tensión, respecto a la possibilidad de unir un nuevo abonado a la red.

## Medidas Eléctricas

C D. 621.315

**Calcul pratique des puissances de court-circuit des réseaux triphasés** — *Henry Wallgren.*

Asea Revue, 17-9-947, n.º 4-5, pág. 41-47.

Dans cet article on esquisse quelques méthodes particulièrement comodes pour le calcul des puissances et courants de court-circuit, utilisées par «Asea».

Deux exemples montrent le mode d'utilization de cettes méthodes, le premier dans le cas où les impedances sont constituées uniquement de réactances, le second dans le cos spécial où des lignes du système présentent résistance et reactance

*Publicam secções de bibliografia técnica as seguintes revistas recebidas na nossa Biblioteca:*

CIENCIA Y TECNICA
REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS
DYNA
CEMENTO Y HORMIGON
REVISTA DA ORDEM DOS ENGENHEIROS
ALFA

# PICKETT & ECKELL

**U. S. A.**

## RÉGUAS DE CÁLCULO

- CONSTRUÇÃO — As réguas são construidas em liga de magnésio, trabalhada com a precisão de 0,001'' e coberta com uma camada de plástico branco e resistente à água e ao óleo. Sobre esta camada de plástico encontram-se gravadas as escalas. As guias da régua móvel e do cursor são em forma de «V». Devido á construção de precisão o deslise é suave, sendo extremamente fácil a execução dos cálculos.
  O cursor é em «LUCITE» e inquebrável. O aperto da régua móvel pode ser variável, regulando-se assim a forma de deslisar.
  O estojo é em «GEON».

- DIMENSÕES:
  320 × 53 × 5 mm.

- PESO:
  160 gramas.

- MODELOS:

  N.º 1 — Para uso geral.
  N.º 2 — Para arquitectura, engenharia civil, etc.
  N.º 3 — Para engenharia química e mecânica.
  N.º 4 — Para engenharia electrotécnica e telecomunicações.

- UMA RÉGUA CONSTRUIDA COMO UM APARELHO DE PRECISÃO.

- As réguas Pickett & Eckell são adoptadas nas Universidades e nas maiores empresas industriais americanas, como por exemplo:
  General Electric Company, Westinghouse Electr. & Mfg. Co, Chrysler Corporation, E. I. Du Pont, De Nemurs & Co., etc.

---

REPRESENTANTES:

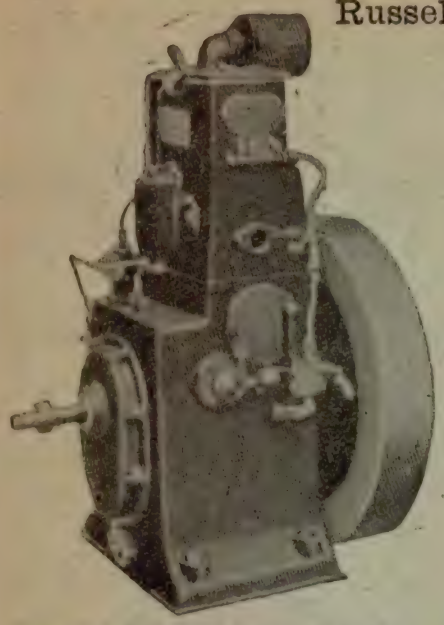
# • TERMO-MECANICA •

LIMITADA

**RUA ANDRADE CORVO, 3-C** **LISBOA**

# MOTORES DIESEL, INGLESES, "RN"

Russell, Newbery & Co. Ltd.



Os melhores e para todos os fins

## MOTORES VERTICAIS ESTACIONÁRIOS,

DE 7 A 44 CAVALOS 800 A 1200 RPM

Em armazém, para entrega imediata, motores de 7 a 10 H. P.

## MOTORES DIESEL MARÍTIMOS DE 14 A 90 CAVALOS

COM TODOS OS ACESSÓRIOS

## GRUPOS ELECTROGÉNEOS

ATÉ 44 CAVALOS

Em armazém, para entrega imediata grupos de 10 HP com dinamos de 110 volts

REPRESENTANTES:

**JAYME DA COSTA, L.DA**

LISBOA PORTO

# CORRENTES RENOLD

A transmissão mais prática

Economia de espaço
Economia de força

Transmissão positiva com cerca de 99 % de eficiência

FUNCIONAMENTO SUAVE
LONGA DURAÇÃO

**Motores «Roston»** a óleos pesados, gás pobre, etc. — Terrestres e Marítimos

**Produtos «Carborundum» e «Aloxite»**
Mós, Pedras e Limas para todos os fins

**Lixas «Durex»** — Temos o maior sortimento do mercado

**HARKER, SUMNER & C.ª L.ª**
14, Largo do Corpo Santo, 18 — LISBOA
152, R. José Falcão, 156 — PORTO

# AÇO VASADO

Aço ao convertidor e ao cadinho. Peças para material de caminhos de ferro, minas, moinhos de minério e em geral todas as aplicações. Laboratórios de ensaio e controle privativos.

**ALFREDO ALVES & C.ª (FILHOS)**

ENGENHEIROS CONSTRUTORES: C. G. ALVES (Dec. 32:204)

E

**FÁBRICAS VULCANO E COLLARES**

(ENCORPORADA EM 1945)

Rua da Academia das Ciências, 5

Telefone, 3 1710 - 3 1719 — LISBOA

Telegramas: FREDALVES

AGÊNCIA NO PORTO: Praça de D. João I, n.º 25-1.º

Telef. 2 4771

# MÁRMORES

aos melhores preços
Em todas as aplicações

IIII

A MAIOR PRODUÇÃO DO PAÍS

IIII

Pedidos à

Sociedade dos Mármores de Portugal, L.da

Rua de S. Domingos de Benfica, 63

**LISBOA**

# Companhia União Fabril

**Sede: Rua do Comercio, 49**

LISBOA

O MAIOR AGRUPAMENTO INDUSTRIAL DA PENINSULA IBÉRICA

**Fábricas em:**
Alferrarede, Barreiro, Canas de Senhorim, Lisboa, Mirandela, Óbidos, Porto, Soure e Vila Nova de Gaia.

Superfosfatos, Sulfatos de Cobre, Enxofre, Sabões, Acidos, Oleos industriais e alimentares, Azeites, Torteame, Sacarias, Grossarias, Fios, Carpetes e Mangueiras.

**Oficinas de:**
Construções metalicas, Mecânica geral de Automoveis e Engrenagens

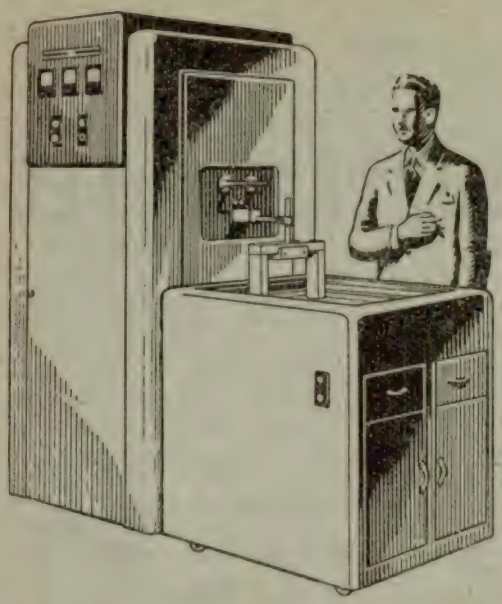
**Fundição de:**
AÇO, FERRO E OUTROS METAIS

**Construção Naval**
(Arrendataria do estaleiro naval da A. G. P. L.)

Metalurgia de Ouro e Prata — Refinação electrolitica

# ALLIS CHALMERS

**O fabricante da mais vasta linha de equipamento do mundo**



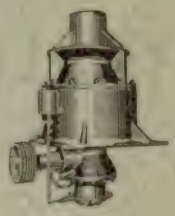
## O Aquecimento por Indução Aumenta a Produção

O novo aparelho de aquecimento por indução da Allis-Chalmers aumenta a produção total e garante a maior exactidão na graduação de temperaturas num grande número de pequenas operações de caldeamento, soldadura e tratamentos térmicos. Podemos fornecer informações mais vastas sobre este novo e notável instrumento de produção.

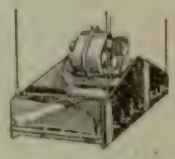
**CONSULTE-NOS SOBRE QUALQUER TIPO DE EQUIPAMENTO ELÉCTRICO**

Somos representantes da afamada linha de fabrico Allis-Chalmers de motores, instalações de distribuição e de comando, transformadores, geradores e aparelhos de soldadura por arco e de equipamento para muitas indústrias.

Motores

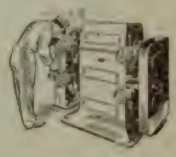


Britadeiras



Crivos

Postos de Transformação



Equipamentos para moagens

**ESTABELECIMENTOS HEROLD, LIMITADA**

**RUA DOS DOURADORES, 7, — LISBOA — TELEF. 24221/3**

# OFICINAS E LABORATÓRIOS

DO

# INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

As oficinas pedagógicas do Instituto Superior Técnico, de CARPINTARIA DE MOLDE, de INSTRUMENTOS DE PRECISÃO e de ELECTROTÉCNICA, fornecem todo o género de material escolar e de demonstração para o ensino técnico. Nos laboratórios de QUÍMICA ANALÍTICA, FÍSICA INDUSTRIAL E DE MINERALOGIA executam-se análises para o público

**Para quaisquer informações, dirigir-se ao secretário da comissão executiva**

# Standard Electrica

ASSOCIADA

DA

INTERNATIONAL TELEPHONE AND TELEGRAPH CORP

- EQUIPAMENTOS PARA TODOS OS GÉNEROS DE COMUNICAÇÕES ELÉCTRICAS por rádio e por circuitos metálicos.
- EQUIPAMENTOS DE TODAS AS POTÊNCIAS PARA RADIODIFUSÃO E TELEVISAO.
- GRANDES E PEQUENAS CENTRAIS TELEFONICAS, manuais e automáticas.
- TODO O GÉNERO DE APARELHAGEM MANUAL E AUTOMÁTICA para instalações telefónicas e telegráficas.
- FORNOS ELÉCTRICOS desde pequenas potências, com aquecimento por correntes de radiofreqüência.
- SISTEMAS PATENTEADOS, DE ANTENAS de alta eficiência.
- CABOS DE TODOS OS TIPOS para comunicações em tôdas as freqüências e para transporte de energia.

**Telefone 2 3111/2/3 Rua Augusta, 27 LISBOA**

Para impermeabilizar terraços, paredes, fundações, etc.

CONTRA A HUMIDADE

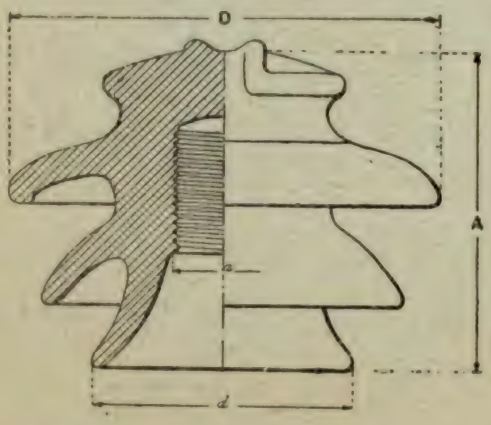
FABRICA EM SACAVÉM

TELEFONE 20879 TELEG. EPALDA—LISBOA

# FÁBRICA DE PORCELANA DA VISTA ALEGRE, L.DA

FUNDADA EM 1824

LISBOA — Sede: Largo da Biblioteca, 17 — Fábrica em Ilhavo — AVEIRO




Além de porcelanas domésticas e artísticas fabrica em larga escala

PORCELANAS PARA USOS INDUSTRIAIS

E PORCELANAS ELÉCTRICAS DE BAIXA E ALTA TENSÃO

DEPÓSITOS:

LISBOA — Largo do Chiado, 18 — Rua Cândido dos Reis — PORTO

A boa economia reside na aplicação criteriosa do dinheiro.
Inteire-se da qualidade dos produtos que pretende adquirir.

Se desejar

*Postes – Manilhas*
*ou*
*Mosaicos*

**PORTO**
**Praça da Batalha, 90-2.º**
**Telef. 2 7117**

**LISBOA**
**Rua D. Estefânia, 42**
**Telef. 4 7812**

**Tabelas para o Cálculo e Implantação das Curvas de Transição em Lemniscata**

Pelos Engenheiros

Fernando de Sousa Ferreira Chaves
e António João Barroso Antunes

**PEDIDOS À REVISTA «TÉCNICA»**

*Para qualquer tipo de construção*

OS ISOLAMENTOS
CONTRA O CALOR
CONTRA A HUMIDADE
CONTRA O SOM
SÃO PRECIOSOS

APLIQUE OS ISOLAMENTOS

**ANTHUMIDE**

REPRESENTANTES: LEACOCK
AV. 24 DE JULHO, 16—LISBOA
RUA JOSÉ FALCÃO, 185—PORTO

COM UM FOGÃO A GAZ e 11 NÃO HÁ MÁS COZINHEIRAS
FÁBRICA PORTUGAL
PRAÇA DOS RESTAURADORES, 49-57 - TEL. 24948

# Emprêsa de Sondagens e Fundações

# TEIXEIRA DUARTE, L.DA

RUA DA BETESGA, 57, 3.º
TELEF. 3 2774

**LISBOA**

SOCIEDADE ANÓNIMA

# BROWN, BOVERI & CIE.

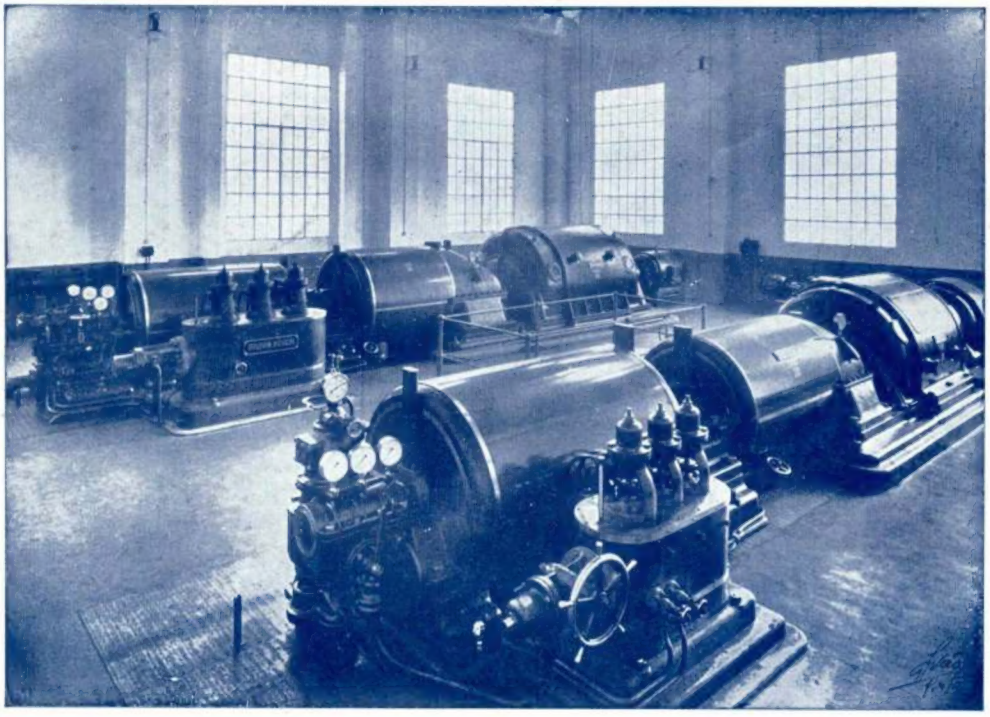
## BADEN (SUISSA)

**Representante geral para Portugal e Colónias:**

## EDOUARD DALPHIN

**Escritório Técnico: Praça de D. João I, 25, 3.º Dir. // PORTO // Tel. 2411**

Máquinas eléctricas, transformadores, mutadores, aparelhos para alta e baixa tensão. Montagem completa de centrais termo e hidro-eléctricas. Electrificação de fábricas e de caminho de ferro. Locomotivas, e auto-motoras eléctricas e Diesel-eléctricas. Máquinas de extracção. Turbinas a vapor. Geradores de vapor Velox. Máquinas frigoríficas. Grupos e transformadores para a soldadura pelo arco. Fornos eléctricos. Comandos eléctricos especiais para tôdas as máquinas utilizadas nas Fábricas de Fiação, Tecelagem, Acabamentos, Estamparia, Cimento, Moagem, Material de alta frequência, Telegrafia, Telefonia, Telecomando, etc.



S. A. União Eléctrica Portuguesa — Setúbal
Turbo-grupos de 6.400 kW